

हिन्दी

माध्यमिक त्रिकोणमिति

(Intermediate Trigonometry)

चय
डोस

लेखक

श्री. यशवन्त विनायक डोसर, एम्. एस्सी.

अनुवादक

श्री. रमेशचन्द्र वर्मा, एम्. एस्सी.

गणित सम्पादक

प्रा. नीलकण्ठ आवाजी शास्त्री, एम्. एस्सी. (लंदन)



FOREWORD

Convinced of the educational and national value of the use of Indian Languages in Indian Universities, the Academic Council of Nagpur University, on 12th September, 1946, resolved that Hindi and Marathi shall be the media of instruction in the University for the Intermediate courses in Arts and Science from the academic year 1949-50 and for the courses for the B.A. and B.Sc., from the academic year 1951-52. And from the same dates English shall cease to be the medium of instruction in the University.

While co-operating whole-heartedly in the prolonged All-India deliberations for the long-range planning for introduction of Indian languages as media of instruction, Nagpur University has—except as regards postponement of the scheme in respect of the science courses for one year—stuck to its schedule, endeavouring, with all its limitations, to surmount the imme-

diate practical difficulties in carrying through a linguistic transition of this magnitude

2 These difficulties are, in the main, the three T's of Terms, Text books and Teachers

Thanks to the timely initiative and generous support of its Government, it was possible for the State of Madhya Pradesh to obtain the services of Dr Raghu Vira of the International Academy of Indian Culture of Lahore and to entrust him with the formidable but foundational task of coining and adapting the technical terms of science for the needs of the new linguistic media. Dr Raghu Vira, who had already devoted a considerable part of his life to a scientific approach to the problem of technical terms has proceeded to his task on the basic principle of *allied words for allied ideas*, derived from the Sanskrit roots. He has reduced the problem of coining terms almost to an art, an art as fine as it is useful

3 These terms have been coined and adapted in close collaboration with a band of experienced and enthusiastic teachers of science deputed by the State Government at the same time to prepare suitable text-books of science

under the general direction and guidance of Dr. Raghu Vira.

They have so far prepared fourteen text-books each with a Hindi and a Marathi version dealing with the Intermediate Science courses in Algebra, Trigonometry, Solid Geometry, Co-ordinate Geometry, Statics, Dynamics, Physics (Theory), Practical Physics, General and Inorganic Chemistry, Organic Chemistry, Practical Chemistry, Zoology, Botany (Theory) and Botany (Practical).

The manuscripts of these text-books, when received from the Government, were referred by the University to its Boards of Studies in the various subjects and, on receipt of their reports, the Academic Council decided, on 8th December, 1949, that, subject to certain specified changes, they be recommended as suitable for the Intermediate Science courses of the University.

4. Finally, in accordance with a suggestion of the State Government and with the help of an appropriate Government grant, the University decided in April, 1950, to undertake the publication of these first text-books prepared for its courses in science. Their printing is now

in progress and seven of these—both Hindi and Marathi versions—which are required for use in the first year of the Intermediate courses are being published today

5 In the special position occupied by the Universities of the Madhya Pradesh, it has been necessary to publish these books both in Hindi and Marathi. This has added to the labour and the cost involved. At the same time it has given us a unique advantage we have here an opportunity of piloting an educational experiment in a regional language and at the same time in the language of the Union. The inter action of the two parallel series of lectures and text books in the same University—and in many cases, in the same college—will, I am confident, prove valuable for the emergence of both Hindi and Marathi as more perfect media of higher education than they can claim to be at present

6 As regards the change of medium for the Intermediate Arts courses, this has already been brought into force from the academic year 1949-50. The proposal for preparation and publication of text books specially designed for

the needs of the University is still under the consideration of the authorities. It was, however, thought desirable not to postpone the operation of the scheme in respect of the Arts courses as (i) the number of technical terms required for Arts is much smaller, as compared with those required for Science; and (ii) a certain number of text-books of the Intermediate Arts standard are already available, both for Hindi and Marathi. For certain subjects, glossaries of technical terms which will serve the preliminary needs of the teachers and the students have also been prepared by the University Boards of Studies. It is further hoped that it would soon be possible to adopt a scheme for preparation of text-books for Arts subjects also.

7. At the transitional stage, the problem of teachers adequately qualified to give instruction through the Indian languages presents another hurdle. For reasons, both historical and geographical, the colleges of Madhya Pradesh have been fortunate in having on their staff teachers who, between themselves, can claim almost all the principal spoken languages of India as their mother-tongues. At the present stage,

however, this creates an immediate difficulty in re organizing the teaching arrangements on the new basis. The University is, however, confident that, where necessary, the teachers will avail themselves of the existing opportunities of acquiring a fairly good knowledge of the language of the Union or a language of their region and that the teachers and the management will, between themselves, so arrange the teaching programmes of colleges that the transition to the new media is made both smooth and effective.

No formal test for imparting instruction through the new media has accordingly been prescribed by the University.

8 The final shape of the cultural media of the new India will, after all, be moulded by that intellectual commerce between the teacher and the taught which we call University education. The scheme of Nagpur University leaves the choice as between the Sanskritic technical terms and their equivalents to the teachers and the students themselves. The text books being published under the scheme give the new Sanskritic technical terms as well as their English equi-

valents and both teachers and students are, at the present stage, permitted to use either of them according to their convenience and requirements. Adoption of this course cuts across the prevailing controversy with regard to the structure of technical terms and, at the same time, gives the newly-coined terms an opportunity to be judged on their own merits along with their English competitors in the academic field.

9. Progress in education requires both individual experiments and general planning, local initiative as well as central direction. It would hardly be proper to be dogmatic about their order of priority and, in the case of a great linguistic transition at the University stage, the problem requires to be attacked on all fronts. The Conference of Education Ministers and Vice-Chancellors of India convened by the Ministry of Education in New Delhi in January, 1948, had recommended five years as the time-limit within which Indian Universities should make the requisite preparations for commencing their instruction through the Indian languages. The Indian Universities Commission has, however, wisely left the determination of the duration

of the preparatory period to the interplay of the various educational and social factors that operate in Universities. Adoption of such a course would leave each University freedom to regulate the pace of its linguistic progress according to its own needs, resources and limitations.

10 Change in the medium of instruction at different dates in different Universities no doubt gives rise to fresh problems. Each of these has, however, to be tackled by an intelligent and sympathetic administrative approach. One of these difficulties evidently relates to the migration of students from one University to another—a process which, I hope will in the national interests, receive every encouragement in the future. The difficulty in this respect, however, would not seem to be so formidable as it might appear at first sight, if we remember that (i) English text-books in each subject will be recommended along with the Hindi and Marathi text books for use of students, (ii) students and teachers will, for the present be familiar both with the Hindi or Marathi terms and with their English equivalents, and (iii) English will continue to be a compulsory subject both for

the Intermediate and for the first degree courses in Arts and Science.

The same considerations would seem to apply to the apparent difficulties in respect of All-India Competitive Examinations. With the goodwill and determination shown by the builders of the new constitution of India, there is good reason for hoping that English may soon cease to be the sole medium for the All-India Competitive Examinations. The institution of the language of the Union as the medium of instruction and examination in the Indian Universities should itself accelerate the pace of progress towards this transition.

11. I venture to hope that this series of books will prove useful not only for the State of Madhya Pradesh, but also for other States in their efforts to adopt a regional language or the language of the Indian Union as the media of instruction at the University level. The present effort is necessarily imperfect. We can write good book in Hindi and Marathi only if we can do original thinking in Hindi and Marathi, as we do in English today. Yet we can hope to do our thinking in Indian languages only when we have

some written material to stimulate and sustain our thinking in these languages. It is a vicious circle that has to be broken and the present series of books is an organised attempt to break it. Deeper thought, practical experience, national planning and local variations will, I have no doubt, change the shape of much of what is written in these text books. If however, they serve even as a raw material on which these forces can play to mould them according to our varying requirements, the labour of those who have worked during the last four years for making this new academic venture a success will have been amply rewarded.

The J N Tata University
Convocation Hall, Nagpur
15th August 1950

K L Dubey
Vice Chancellor,
Nagpur University

INTRODUCTION*

The writing of the Intermediate Trigonometry was begun in April, 1947 by Shri Y V Thosar, M Sc, Lecturer in Mathematics, College of Science, Nagpur who was deputed to work with me by the Government of Madhya Pradesh. Shri Thosar consulted a number of books by Indian and English authors and wrote his first draft in English. Shri B K Paradkar helped him in the collection of questions set at Indian University examinations. The problems were solved by the author himself and answers were appended to the book. Shri N A Shastri, Asstt. Professor of Mathematics, Mahakoshal Mahavidyalaya, Jabalpur, revised the English draft and made useful suggestions for improvement. The next step was the preparation of a complete list of trigonometrical terms including phrases and symbols for which Hindi and Marathi equivalents were needed. These were made available to Shri Thosar by me, Shri N. A Shastri and Shri V. N Dabadghao (Asstt Professor of Physics,

*In writing the introduction in English I have followed the wishes of Lt Col Shri K L Dubey, the Vice-Chancellor of the Nagpur University. It is hereby intended to introduce the book to such teachers as know neither Hindi nor Marathi.

Vidyaśha Mahavidyalaya, Amravati) working in collaboration. Some work in this direction had already been done by myself and Dr. Braj Mohan of the Hindu University Banaras. Shri. Thosar wrote out the Marathi text on the basis of the material that he had collected in English. It was next translated into Hindi by Shri R. C. Verma, M. Sc. now lecturer in Mathematics, Mahakoshal Mahavidyalaya Jabalpur. Shri V. K. Mathur, M. A. helped Shri R. C. Verma in finalising the Hindi version. The two versions were carefully compared by Shri Shastri. Shri Thosar and Shri R. C. Verma. Finally the book was submitted to the Board of Studies in Mathematics of the Nagpur University which recommended the book for the Intermediate examination.

*

*

*

Sanskrit possesses a rich mathematical literature, which is replete with technical terms. We have made free use of these ancient terms, though very often we had to restrict the use of one term to one specific meaning only. The requirements of modern trigonometry are however, not satisfied in their entirety by ancient terms. Hence new terms had often to be evolved. They are designed to be short, compact and significant. For a clear understanding of the terms used in the present book, I am giving hereunder short word notes which, I hope, would be found useful by teachers and students alike.

त्रिकोणमिति is a Sanskrit facsimile of the European word trigonometry. *It* is Sanskrit त्रिकोण for Greek *gonia* is the commonest Indian word for angle. त्रिकोण already occurs in the Mahabharata. कोणस्पृष्ट of भास्कराचार्य

has been translated by Colebrooke as a 'circle in contact with the angles, an exterior circle, one circumscribed *Metry* मिति 'measurement', from Sanskrit root मा to measure

अंश 'numerator' and 'degree' is an ancient word. Grade has to be distinguished from degree It is $\frac{1}{100}$ th part of a right angle and thus smaller than a degree which is $\frac{1}{90}$ th part of a right angle It has been translated by अंशक, smaller than an अंश, the suffix क denoting diminution.

अक्ष has been used in Indian astronomy for 'terrestrial latitude' We have used the specific word अक्षवृत्त (of विषुवद्वृत्त equator, देशान्तरवृत्त longitude) In our terminology अक्ष has been retained for 'axis'

अधिकोण is an obtuse angle (अधि stands for अधिक : e an angle greater than a right angle Of न्यूनकोण acute angle)

अनुपात 'proportion' is an ancient word and is in wide use in Hindi, Bengali Marathi and other languages अनुपाती is proportional

अनुच्छेद 'article' is already in use in Bengali It has also been used in the Hindi version of the Indian Constitution Etymologically अनु small + छेद section

अनुरेखण 'trace' : e, 'to copy by following (अनु) the lines (रेखा), is a denominative verb अनुरेखित traced

अपवर्ग is used for multiple in Hindi and Bengali. अपवर्गक is an ancient word in the sense of a common measure.

अपवर्तन = reduction of a fraction to its lowest term.

अयुग्म 'odd' and युग्म 'even' are ancient words used as early as the गृह्यसूत्रs.

अर्ह 'value' is from $\sqrt{\text{अर्ह}}$ to deserve, to merit, to be worthy of.

अल्पिष्ठ least. Of स्थिति maximum Both are ancient words.

अदेश substitute It is well known to students of Sanskrit, e.g. पाणिनि—स्थानिबदादेशोऽनस्त्वयौ.

आयत 'rectangle' is an ancient word and is also in common use in Hindi, Bengali and other Indian languages.

आयाम 'length' is an ancient word.

अर is the spoke of a wheel, hence a radius. From अर is derived आर radian, i.e. a central angle subtended in a circle by an arc whose length is equal to the radius of the circle. Radian, when used as an adjective, would be आरीय.

आवर्तकाव, आवर्त period आ + $\sqrt{\text{वृत्}}$ 'to turn round'.

ज्या is the parent of 'sine'. ज्या 'sine of an arc' has been used in the सप्त सदान्त 11.57. कोटिज्या 'cosine' is also from the सप्तसिद्धान्त. There it signifies the cosine of an angle in a right-angled triangle.

उत्क्रमकोटिज्या covered sine. उक्रम is versed or reversed, कोटिज्या cosine

उच्छ्रय and उधता have been specifically used for altitude and height respectively. Both are ancient words.

उदय is an ancient word, 'point upwards,' hence 'vertical'.

उपसाध्य corollary, साध्य proposition A corollary is a proposition requiring no additional proof following upon one just demonstrated

उपसादन to bring near, उपसन्न brought near, approximate समव्यवधारण common to both

धन positive and ऋण negative धन in the sense of an affirmative quantity or plus and ऋण in that of a negative quantity or minus are ancient words

एक unit ('a single thing, as a magnitude or number regarded as an undivided whole') It is used in this sense in Bengali (see Guba's Modern Anglo Bengali Dictionary)

ऐक्य identity, from एकत्वं identical

कर्ण 'hypotenuse of a triangle' is an ancient word

कला 'minute' occurs in सूर्यसिद्धान्त and other works

वाटिका a second has been derived from वट्टा which is $\frac{1}{90}$ th of a कला (see Manu I 64) वाटिका is smaller than a वाट्टा विटला stands for the second of a degree in सूर्यसिद्धान्त

स्पर्शज्या (abbreviated to स्पर्ज्या) is tangent when it is the portion (of the straight line tangent to a curve) between the point of tangency and a given line In the sense of a tangent line or curve it is स्पर्शरेखा or simply स्पर्श

क्रोशक mile In ancient literature the common क्रोश is of the length of 4000 हस्त i.e. 6000 feet, a हस्त being $1\frac{1}{2}$ feet A mile (5280 feet) is shorter than a क्रोश (क is added to क्रोश to signify diminution)

স্থিতি 'horizon', occurs in *আয়মত* and *সুশাসিত*. It is also widely used in Hindi, Bengali, Marathi, etc. *স্থিতি* is horizontal.

ক্ষেত্র area. The word is used in the *গোলাধ্যায়* and *কাল্যায়ন শ্রৌতসূত্র* as meaning the superficial contents of a figure. It is current in Hindi, Bengali, etc. *ক্ষেত্র* is also used by *আয়মত* for area of a figure. Thus *স্বত্বক্ষেত্র* occurs for distinct or precise area (of a triangle, etc.).

শক্তি 'power' is widely used in Hindi. It is an ancient word. It is from *√কৃ* to multiply.

চরণ quadrant. It is an ancient word and signifies a fourth part.

কোণ arc is from *সুশাসিত*.

লগা logarithm. According to *নেমিষদ্র* the Jain author of *ত্রিলোকমার* if $x=2^n$ then n is called the *অখণ্ডের* of x . *উদ* is the number of times a particular number can be divided by a base. If $64=4^3$ then 3 represents the number of times that 64 can be divided by 4. Literally *উদ* is cutting and the number of times that the division can take place is *উদসংখ্যা* or simply *উদ*. In $64=4^3$, 3 is the log of 64 to the base 4. *দশলগা* common logarithm, *দশলগা* common system of logarithms i.e. logarithms having 10 for their base. Its complete translation would be *দশখণ্ডের*. For brevity *দশলগা* has been used instead.

দ্বিসমকোণ isosceles triangle. Latin *isosceles* is from Greek *isos* equal + *skelos* leg. In geometry it is a triangle having two equal sides. It is a significant but unintelligible word. *দ্বিসমকোণ* is in comparison

simplicity itself. It is a त्रिभुज three sided figure, दि two of the sides being सम equal.

द्विघात समीकार quadratic equation Quadratic is an adjective from quadrate 'square'. In a quadratic equation समीकार the highest power घात of the unknown quantity is = square दि.

दशमिक decimal दशमन्तर is widely used in Hindi for decimal. Here is visible an attempt to have a phonetic approximation to the English word. But दश meaning a part is not required after दशम, as दशम itself means the tenth part. Decimal is derived from L. *decimus*, 'tenth' from *decem* 'ten' + *al*, of which the exact Indian equivalent will be दशमिक (दशम tenth + इक). In Bengali दशमिक is already current (see Guba's Modern Anglo Bengali Dictionary).

दशमिर्वास mantissa This word is believed to be of Etruscan origin. The Indian word is crystal clear while the English word is perfectly opaque. In Latin it meant an addition, male weight. It has gone out of use in general English where it meant an addition of little value. In mathematics it denotes the decimal दशमिक part अंश of a common logarithm.

ध्रुव pole ध्रुव in the मूलविद्वान्त signifies a celestial pole. It is widely used in all important Indian languages.

ध्रुववृत्त meridian Meridian is a great circle वृत्त on the surface of the earth, passing through the poles ध्रुव and any given place. ध्रुववृत्त is short for ध्रुवान्तगामी वृत्त.

निर्णय problem A problem is a proposition requiring an operation to be performed or a construction निर्माण to be made. Laterally निर्णय is that which is to be

constructed Cf. प्रमेय theorem

निपाति 'ratio is used not only in Hindi but in Bengali and elsewhere (e.g., see the Modern Anglo Bengali Dictionary by Charuchandra Guha).

न्यास for data is widely used in our astronomical literature Etymologically it is that which has been put down नि+अस् to serve as a basis for mathematical investigation. Literally data or its singular datum would be दत्त 'given'

न्यूनकोण acute angle It is less than a right angle
अधिकोण obtuse angle

परि circum परि as a prefix implies round, around, about. Circum is used adverbially to signify around, about, on all sides Cf. परिकेन्द्र circumcenter, परित्रिज्या circumradius, परिलेखन circumscribe, परिवृत्त circumcircle

परिमाप perimeter, the whole outer boundary or measure माप of a body or figure

पाद foot पद and पाद both mean foot. The English word is historically a descendant of the Sanskrit word. As a measure पाद has been used in the शतपथब्राह्मण, in the श्रौतसूत्रs and elsewhere Like all other measures in ancient times it must have varied slightly from place to place There are two measurements given for पाद, one is 12 अंगुलs and the other is 15 अंगुलs (कारत्यायनश्रौतसूत्र). The second measurement is approximately 11½". In modern times the foot is a fixed measurement of 12 inches. It was used extensively for measuring land. On the European Continent, the foot, now largely replaced by metric units, varies locally between 11 and 14 inches It is interesting to note that as in India the पाद was subdivided

into 12 angulas so in the English system also the foot is subdivided into 12 parts, the inches. Only an inch is slightly bigger than an अंगुल (and hence our word प्रांगुल for inch). An inch was originally divided into three parts called barley corns, whose length was declared by a statute apparently of 17 Edw II given in the Cottonian Manuscripts (Claudius D 2) to be that of three grains of barley, dry and round, placed end to end lengthwise.

पादाक्षर suffix It is an अक्षर or figure at the foot. Suffix or sub index is a character affixed below to a symbol, to distinguish it in its class. Cf. सूत्राक्षर superscript.

पूर्णक integer The Indian term is quite clear in its meaning and is more readily intelligible than its English equivalent पूर्णाङ्क for integer, is used in Hindi, Bengali, etc.

प्रचय common difference It is an ancient word.

प्रति stands for anti-, प्रति घटीवत् is anti clockwise from घटावत् clockwise. बनावर्त and दक्षिणावर्त are ancient words and can be used as alternatives.

प्रतिबन्ध condition Condition is that which limits or modifies the existence or character of something; a restriction or qualification. The word is used in Hindi.

प्रतीक 'symbol' occurs as early as the छान्दोग्य उपनिषद्.

प्रदीप inverse, literally 'against प्रति the stream अप्'.

प्रथम principle प्रथमम् = प्रथमनियम. Principle is a comprehensive law or doctrine from which others are derived or on which others are founded, an elementary proposition or fundamental assumption. The use of प्र in the sense of first is well-known. Cf. प्रकृति the original or

primitive substance **प्रपद** (प्र+तम) itself is a superlative of प्र.

प्रमेय for theorem is in use in several languages. Guha's Anglo-Bengali Dictionary gives **प्रमेयोपपाद** **प्रमेय** is that which is to be established by **प्रमाण** or proof. Of **निर्मेय** problem

प्रायुज inch (see under पाद foot)

फल 'result' is from **सुप्रमिद्वान्त** (the result of a calculation, product or quotient, etc.)

बहिर्लेखन ecribe **बहिर्लिखित** escribed **बहिर्लेखन** is to write (or draw) externally. **Escribe** is to draw (a circle) touching one side of a triangle externally, **बहिर्दृष्ट** excircle; **बहिर्द्वीप** exterior angle, **बहिर्कन्द्र** excentre

चिह्नरेख graph **चिन्हुरेख** **चिन्हुरेख** literally dots and lines. A graph is a diagram symbolising a system of interrelations by **spots** (चिह्न), all distinguishable from one another and some connected by **lines** (रेखा) of the same kind

दिग्द 'disc' is an ancient word

भागफल quotient **Quotient** is literally 'how many times'. It is the number resulting **फल** from the division भाग of one number by another. **भागफल** is current in Hindi and Bengali. **लीलावती** gives **फल**, which we have already retained for result in general. Other ancient words for quotient are **भाग**, **द्वि**, **आप्त**, **आप्ति** **अप्राप्त**, **अवप्ति**, **लब्ध**

भिन्न 'fraction' is from **लीलावती**. It is widely used in ancient Indian mathematics, some of its compounds are **भिन्न सङ्कलन** addition of fractions, **भिन्न-गुणन** multiplication of fractions, **भिन्न घन** the cube of a fraction, **भिन्न भाग हर** d vision of fractions (**लीलावती**)

भुज meaning the side of any geometrical figure has been used as early as कार्त्तव्यायन श्रौतसूत्र

नियच्छेदन intersect Intersect is to cut छेद into one another निय

यथार्थ exact Of सुनध्य precise, शुद्ध correct, परिशुद्ध accurate

योग 'addition' is from ययसिद्धान्त Of वियोग 'subtraction' from गणिताध्याय.

राशि 'quantity', an ancient word, is current in Hindī, Bengali, etc

रैखिकी geometry रेखागणित, is in common use रैखिकी is short for रैखिकी विद्या the science pertaining to lines or the science of lines. Similarly प्राणिकी=प्राणिरी विद्या zoology, औद्भिरी=ऋद्भिरी विद्या botany

Naming of sciences was as varied in ancient days, as it is today in the European languages Sometimes abstract nouns were used as परिचिष्टता Chemistry, surgery are European examples of abstract nouns as names of sciences In the names of arts and crafts, some word denotative thereof, was suffixed—मधूच्छिष्टकर्म wax modelling (मधूच्छिष्ट wax), धवीकर्म needle work, मणिभूभिकाकर्म gem mosaic work. Sometimes the word denotative of art and craft was left out as in मणिराग colouring of precious stones The general action noun करण has been used in शुरुनीतिसार in धातु साकर्य पार्थक्य करणम् the art of combination and isolation of minerals

कर्म standing for art was sometimes dropped particularly where the preceding word was itself a compound It was usual to transfer the neuter gender of कर्म to

the compound which was a sort of adjective made to serve as a noun. We have a beautiful example in the ममत्रायम्, viz., उदकमृष्टिकम्. The use of adjectives for naming sciences also became common, e.g., सारयम् वैशेषिकम्, एन्द्र जालिकम्.

As for arts and crafts the general term कर्म was a neuter noun, so for different branches of knowledge there was the general term विज्ञानम्. शुक्रनीतिसार mentions पञ्चाशीनां संयोगोऽपूर्वविज्ञानम्. Knowledge of new combinations of minerals, and काचपत्रादिकरणविज्ञानम् 'knowledge of making glass utensils.

From the most ancient times we read of numerous विद्याs or sciences. The परा and अपरा विद्या of the उपनिषद्स are well known. Again, adjectival forms with feminine endings, originally intended to be followed by विद्या, have been used in the same way as the neuter उदकमृष्टिकम्. मानसी thus is the science of the mind. प्रथी, चार्ता, ध्वान्नीभिर्नी are well known from the अथशास्त्र of Kautilya. रामचन्द्र in his commentary on the first verse of हृदयगदवि, a continuation of चम्पूराजायन of विदभरान, mentions two sciences अदृश्यवर्णी and दृश्यवर्णी. The commentators of श्रीमद्भागवत, such as श्रीधर, record वैतयिकी विद्या, वैतयिकी विद्या, व्यायामिकी विद्या, वैतान्त्रिकी विद्या.

The adjectival suffix *ic* in English (ultimately derived from Skt. स्व, through Greek *ikos*, Latin *icus* and French *ique*) has been similarly used. Greek or Latin nouns that were originally adjectives used substantively have been adopted into English, as arithmetic, music, logic, etc. Since 1600 A.D. the

plural form *ies* has been used instead to denote names of sciences as in physics, mathematics, politics, athletics, economics. This was probably in imitation of the Greek *ta physika*, *ta ethika*. It is further interesting to note that these plural forms are now construed as singulars. In French and German the singular is still used in the names of sciences, e.g., *die Physik*, *die Politik* in German and *la physique*, *la politique* in French.

लम्ब 'perpendicular' is an ancient word. Other words used in ancient works are अवलम्ब (लीलावती), अवलम्बक, अधो हम्ब, आलम्ब, बलम्ब, कोटि (the perpendicular side of a right-angled triangle, सयसिद्धान्त). Compounds from हम्ब are समलम्ब having equal perpendiculars, अन्तलम्ब a triangle in which the perpendicular falls within, etc.

हम्बरद् orthocentre. Orthocentre is the common intersection of the three altitudes of a triangle, or of the four altitudes of a tetrahedron provided these latter meet in a point.

लम्ब कोण right angle is, the angle कोण made by a perpendicular हम्ब. In Hindi and Bengali समकोण is sometimes used for a right angle. It is not a happy word because सम means equal.

हम्ब पूर (कोण) complementary (angle). हम्बपूर is short for हम्बकोण पूरक, that which completes पूरक a right angle. हम्बकोण वक्र 'curve' is an ancient word.

वग square, वगमूल square root. In ancient usage वग is the square of a number, e.g., पञ्चवग square of five. भिन्नवग square of a fraction. वग and वगमूल are widely current in Hindi, Bengali, Marathi, etc.

वर्तुल 'circular' is an ancient word. It is from √वृत् to turn, to revolve. Cf वृत् a circle.

विकोणमान theodolite Theodolite is an instrument for measuring horizontal and usually also vertical angles. विकोणमान is literally an instrument which measures मान angles कोण of various kinds वि, वि being short for विविध.

विशण diagonal In ancient mathematics वर्ग has been used for hypotenuse and diagonal both. वर्ग has been retained by us for hypotenuse, while the specificatory prefix वि (here short for विशण) has been added to कर्ण to designate a diagonal.

रिक्त minus It is from व्यतिरिक्त.

वियोग 'subtraction' is from गणिताध्याय. Cf योग addition.

विषम 'odd,' is from वृद्धातरु of बराहमिहिर. Also current in Hindi, Marathi, Bengali, etc.

वैकल्पिक 'alternative' is an ancient word. It is used in Hindi, Bengali, etc.

व्यञ्जक 'expression' is the current Marathi word and is also an ancient usage.

व्यास 'diameter' is from Vedic शुल्वसूत्र.

व्युत्क्रम reciprocal It is an ancient word meaning inverted order, so is the reciprocal of a function. In Latin 'reciprocal' is turning backward and forward.

वृत् 'circle' is from गणिताध्याय. It is current in many Indian languages.

शकल sector (part of a circle) शकल means a fragment, piece, or bit. In कादम्बरी of Bana occurs the expression चन्द्र शकल.

शतिक centesimal शतिक 'hundredth' occurs in बराहमिहिर's
बृहत्संहिता

शतिमान centimeter Meter is from Latin *mensus* to measure, akin to Greek *metron* a measure, ultimately from Sanskrit म् to measure In English meter has two senses (1) That which measures an instrument or an apparatus, e g, barometer, thermometer In this sense it is usually a suffix (2) A unit of length Its Indian counterpart is मान As a suffix it has been used in वर्षमान (वैदित्य अधशास्त्र) an instrument for measuring rainfall When standing by itself it has been used as a general word expressing measure as well as particular measures e g according to the commentator of तैत्तिरीयमहिसा and कात्यायन-श्रौतसूत्र 100 मानs make 5 पदs or पणs

The word मान can be made to cover both the usages of meter viz, (1) मान, me er, as the unit of length, and (2) मान as a suffix denoting a measuring instrument, e g, तापमान thermometer

Meter is subdivided into decimeter, centimeter, millimeter, etc Their Indian equivalents would be दशमान, शतिमान, सहस्रमान, etc Similarly for decimeter, hectometer, kilometer, etc, which are its multiples the Indian equivalents would be दशमान, शतमान, सहस्रमान, etc (For the complete series see our tables of Weights and Measures, appended to the Great English Indian Dictionary)

शिरोदण्ड or शिरोवार bar=vinculum शिरोदण्ड or शिरोवार the bar at the top Vinculum is a straight horizontal mark placed over two or more members of a compound.

शिरोबिंदु vertex. In any figure having a base it is the point बिंदु opposite to and farthest from, the base, the top शिरस्.

शून्य zero. It occurs in such works as गणितशास्त्र and ब्रह्मसिद्धि's ब्रह्मसंहिता. From it are derived Gr. *kenos*, *keneos*, *Jennos*, etc. That the conception of zero is essentially Indian is now well known. According to the Encyclopaedia Britannica, the Sanskrit term शून्य passed into Arabic as *as-sifr*, from which are derived Italian, French and English *zero*.

भिन function. 'This term is used mostly to point out dependance on some certain variable or variables' Mathematics Dictionary by Glenn James and R. G. James. It is the past participle form from √ भि to depend on. भाग्य is from the same root.

श्रेढी 'progression' is an ancient word meaning a particular numerical notation or progression of figures.

षष्ठक sextant. Sextant is the sixth part of a circle. It occurs as early as पाणिनि.

षष्टिक sexagesimal, meaning pertaining to or founded on, the number sixty. षष्टिक is the adjectival form of षष्टि sixty.

सर्वापारकोण radian. Radian is an angle कोण subtended by an arc चाप equal स in length to the radius अर.

संपतन or संपात coincidence. The English word is derived from Latin *coincidere*, from *co* + *incidere* to fall on. संपतन = सं together + पतन falling.

संवादी 'corresponding' is an ancient word (e. g. in काव्यादर्श). Literally it means conversing with, hence agree-

ing or harmonizing with The English word 'correspond' (com + re pond) etymologically means 'to answer to' from which are derived its figurative senses 'to answer in fitness, character, function, amount'

सम्पर्श contact Contact is from Latin *con tactus* to touch on all sides सम्पर्श = स mutual, close + स्पर्श touch.

सत्यापन 'verification' is an ancient word The verbal form is सत्यापयति verifies

मदिश vector Vector (from Latin *vehere, vectum* to carry) is a complex entity representative of a directed magnitude मदिश means 'having a direction दिश' Our word is clearer and will be more easily understood by the Indian students

समाग homogeneous, uniform Homogeneous is alike in nature and therefore, comparable in parts (सम alike + अग parts)

समान्तर श्रेढी arithmetic progression गुणोत्तर श्रेढी geometric progression Arithmetic progression—a progression श्रेढी whose elements progress by a constant (सम same) difference अन्तर (positive or negative) as 1, 3, 5, 7 or $a, a \pm d, a \pm 2d$ & $a \pm 3d$ 'Arithmetic progression' is not a very intelligible expression Geometric progression is 'that in which elements progress by a constant factor, as 1, 2, 4, 8, 16, any term is obtained by multiplying the preceding one by the constant factor' गुणोत्तर श्रेढी— गुण multiplication उत्तर successive, श्रेढी progression

सरलन simplify सरलन is a nominal verb (नामधातु) from सरल simple

सर्वाङ्गसम congruent. सर्वांगसम (सर्व+अंग+सम) equal in all parts. Congruent is from Latin 'to come together, coincide, agree'. In geometry it means superposable so as to be coincident throughout. For us सर्वांगसम is simpler and more expressive than congruent.

साधन्त throughout. साधन्त(स with +आदि beginning +अन्त end). It is prevalent in this sense in Hindi and Marathi.

सामि- The Latin prefix *semi-*, akin to Greek *hemi*, is related to Sanskrit सामि-. It is combined chiefly with adjectives and nouns meaning half. Cf. semiperimeter सामि परिमाण.

सारणी table. सारणी is from √सृ to run, the word originally means a running stream. Table signifies any collection and arrangement (generally in parallel columns) in a condensed form for ready reference of many particulars or values, as of weight, measures, etc. सारणी covers the meaning of the word table as implied by its 'running' character. The word is in common use among the astronomers of India.

समायत square (figure). समायत is an आयत or rectangle with all the sides सम or equal. In Hindi वर्ग is used to denote a square figure as well as the product of a number or quantity multiplied by itself. We have retained वर्ग for the latter sense and समायत for the former.

सीमान्ते in the limit. सीमान्ते is the Sanskrit locative singular form from सीमन्त limit. In Hindi it can also be expressed by सीमान्त पर.

स्पर्शदा 'tangent' is short for स्पर्शज्या.

स्थिरांक 'constant', is a magnitude that is supposed not to change its value in a certain discussion or stage of

investigation. The adding of अक to रिख makes the Indian word clearer.

इत 'denominator' is an ancient word. It is derived from √ ह to take away i.e. to divide.

* * *

During the course of last three years, I have had the privilege of enjoying the kind sympathy of the Hon ble Pt Ravi Shankar Shukla, the Chief Minister of Madhya Pradesh. To the Hon ble D K Mohta, my debt of gratitude is immense. It is he who, as the Finance Minister of the State, set the ball rolling. The Hon ble Pandit Dwarla Prasad Mishra with his unbounded love for Hindi has been taking personal interest and has gone so far as to establish a special department for the purpose of establishing Hindi and Marathi as the languages of this State. To Lt Col N Ganwani, the Education Secretary in 1947-48 and his successor Dr V S Jha, I am indebted, for giving top priority to my requirements. Since the establishment of the Languages Department in January, 1950, Shri A R Deshpande, the Under Secretary, has been extending to me his whole-hearted cooperation.

My very special thanks are due to Lt Col Kunjilal Dubey, the Vice Chancellor of the Nagpur University. It is due to his love for Hindi and Marathi that the Nagpur University is leading India in the matter of introducing Hindi and Marathi as the media of instruction. It was again due to him that the Nagpur University

has taken the heavy responsibility upon itself of publishing the text-books that were prepared under the orders of the Government of Madhya Pradesh.

Lastly my thanks are due to my colleagues, the authors of the text-books, who have been with me for the last three years. They have worked devotedly, fully convinced of the service that they are rendering to the nation. They have considered their work to be their reward.

Raghu Vira

The title page, preface and introduction have been printed at the Aryabharati Press, Nagpur.

विषय सूची

अध्याय		पृष्ठ
	Foreword	1-10
	Introduction	11-30
	प्रस्तावना	31
	त्रिकोणमिति के महत्त्वपूर्ण सूत्र और फल	३-१०
१	कोणमापन, पाष्टिक और शक्ति माप, वर्तुल अथवा आरीय माप ।	११-२५
२	न्यूनकोणों की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियां व्युत्क्रम सम्यन्ध, मूलभूत ऐकात्म्य ।	२६-४१
३	कुछ प्रमाण कोणों की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियां । ०°, ९०°, ४५°, ६०° और ३०° की निष्पत्तियां । ज्या अ < अ < स्प अ सी $\frac{\text{ज्या अ}}{\text{अ}}$ और सी $\frac{\text{स्प अ}}{\text{अ}}$	४२-६३
४	त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों के विचरण, निष्पत्तियों में परिवर्तन दर्शाने वाले विदुरेख ।	६
५	किसी भी महत्ता के कोण की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियां,	

प्रस्तावना

मध्यप्रदेश के शासन के आदेशानुसार मैंने यह पुस्तक लिखनी आरम्भ की थी । इन पुस्तक के पारिभाषिक शब्द आचार्य डा० रघुवीर जी ने दिए हैं । यह उनकी सतत प्रेरणा और उत्साह वर्धन का ही फल है कि यह पुस्तक इस रूप में लिखी जा सकी । जहाँ तक सम्भव हुआ है इस पुस्तक को निर्दोष और स्यागपूर्ण बनाने का प्रयत्न किया गया है । आवश्यकतानुसार स्थान स्थान पर उदाहरण देकर विषय को समझाया गया है । विभिन्न प्रमेयों और उदाहरणों की साधना के लिए कई रीतियाँ दी गई हैं । इस दृष्टि से यह पुस्तक विद्यार्थियों के लिए विशेष उपयोगी सिद्ध होगी ऐसा मेरा विश्वास है ।

जयलपुर के महाकोशल महाविद्यालय के गणित प्राध्यापक श्री नी० आ० शास्त्री ने समय-समय पर उपयोगी सुझाव देकर मुझे आभारी किया है । श्री बी० के० पटाडकर एम्० एस्सी० ने इस पुस्तक के लिए कुछ उदाहरणों का संग्रह करने में मेरा सहायता की है । श्री रमेशचंद्र वर्मा एम्० एस्सी० ने इस पुस्तक का हिन्दी में अनुवाद किया है और श्री विजयेन्द्रकुमार माथुर एम्० ए० ने उन्हें भाषा की सहायता दी है । अन्त में श्री व० शे० शर्मा ने भाषा की दृष्टि से इस पुस्तक की आवृत्ति की है और श्री अयोध्याप्रसाद श्रीवास्तव एम्० एस्सी० ने इस का प्रूफ देखा है । मैं इन सब का आभारी हूँ ।

य. वि. ठोसर

विषय सूची

अध्याय		पृष्ठ
	Foreword	1-10
	Introduction	11-30
	प्रस्तावना	31
१	त्रिकोणमिति के महत्वपूर्ण सूत्र और फल कोणमापन, पाष्ठीक और शक्ति माप, वर्तुल अथवा आरीय माप ।	३-१० ११-२५
२	न्यूनकोणों की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियां व्युत्क्रम सम्यन्ध, मूलभूत ऐकात्म्य ।	२६-४१
३	कुछ प्रमाण कोणों की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियां । ०°, ९०°, ४५°, ६०° और ३०° की निष्पत्तियां । ज्या अ < अ < स्प अ सी $\frac{\text{ज्या अ}}{\text{अ}}$ और सी $\frac{\text{स्प अ}}{\text{अ}}$	४२-६३
४	त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों के विचरण, निष्पत्तियों में परिवर्तन दर्शाने वाले चिह्नरेख ।	६४-७२
५	किसी भी महत्ता के कोण की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियां,	

- ॥ को निष्पत्तियों के पदों में - अ,
 $90^\circ - अ$, $90^\circ + अ$, $180^\circ - अ$, $180^\circ + अ$
 की निष्पत्तियाँ। ८०-१००
- ६ दत्त त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों वाले
 सय कोणों के लिए सामान्य पदसंहतियाँ,
 सरल त्रिकोणमितीय समीकार। १०१-११६
- ७ योग और वियोग प्रमेय,
 गुणनसूत्र ११७-१४२
- ८ अपवर्त्य और अपवर्तक कोणों की
 त्रिकोणमितीय निष्पत्तियाँ,
 18° और 36° की निष्पत्तियाँ। १४३-१६६
- ९ ऐकात्म्य और त्रिकोणमितीय समीकार। १६७-१८३
- १० त्रिभुज की भुजाओं और कोणों में
 पारस्परिक सम्बन्ध। १८४-२०३
- ११ त्रिभुज के गुणधर्म।
 त्रिभुज से सम्बद्ध वृत्त,
 लम्बकेन्द्र, पदिक त्रिभुज, मध्यगा,
 कोणों के अर्धरू। २०४-२४३
- १२ वृत्तीय चतुर्भुज, नियमित बहुभुज,
 किसी भी वृत्त का क्षेत्रफल। २४४-२५४
- १३ छेदा। २५५-२७६

१४	त्रिभुजों का निर्धारण । लम्बकोण त्रिभुज का निर्धारण, किसी भी त्रिभुज का निर्धारण, संदिग्ध दशा ।	२७७-३१६
१५	उंचाईयाँ और दूरियाँ ।	३१७-३२८
१६	प्रतीप चतुर्ल श्रित । उत्तरमाला । पारिभाषिक शब्दावलि छेदा और प्रतिच्छेदा सारणियाँ । शुद्धिपत्र ।	३२९-३३६ ३३७-३५० ३५१-३६२ ३६४-३६७ ३६९-३७०

समतल
त्रिकोणमिति

त्रिकोणमिति के महत्त्वपूर्ण सूत्र और फल

(important formulae and results in trigonometry)

$$१ \quad \text{वृत्त की परिधि} = २ \text{ प्यात्र}$$

$$\text{प्या} = ३.१४१५९ \dots\dots\dots$$

$$= \frac{२२}{७} \text{ लगभग}$$

$$\frac{१}{\text{प्या}} = ०.३१८३१ \dots\dots\dots$$

$$१ \text{ आर} = ५७^{\circ} १७' ४४.८'' \text{ लगभग}$$

$$१ \text{ लंबकोण} = ९०^{\circ} = १००^{\text{अ}} = \frac{\text{प्या}}{३.२} \text{ आर}$$

$$\text{कोण का आरीयमाप} = \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}}$$

$$२ \quad \text{घुज्ज्या अ} = \frac{१}{\text{ज्या अ}}$$

$$\text{घुत्क्रोज्या अ} = \frac{१}{\text{कोज्या अ}}$$

$$\text{कोस्प अ} = \frac{१}{\text{स्प अ}}$$

$$\text{ज्या}^2 \text{अ} + \text{कोज्या}^2 \text{अ} = 1$$

$$\text{व्युत्कोज्या}^2 \text{अ} = 1 + \text{स्प}^2 \text{अ}$$

$$\text{व्युज्या}^2 \text{अ} = 1 + \text{कोस्प}^2 \text{अ}$$

$$\text{स्प अ} = \frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}}$$

$$\text{कोस्प अ} = \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}}$$

३. $\text{ज्या } 0^\circ = 0, \text{ कोज्या } 0^\circ = 1, \text{ स्प } 0^\circ = 0$

$$\text{ज्या } 30^\circ = \frac{1}{2}, \text{ कोज्या } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ स्प } 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{ज्या } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ कोज्या } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ स्प } 45^\circ = 1$$

$$\text{ज्या } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ कोज्या } 60^\circ = \frac{1}{2}, \text{ स्प } 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\text{ज्या } 90^\circ = 1, \text{ कोज्या } 90^\circ = 0, \text{ स्प } 90^\circ = \infty$$

$$\text{ज्या } 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \text{ कोज्या } 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},$$

$$\text{स्प } 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$$

$$\text{ज्या } 75^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \text{ कोज्या } 75^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{स्प } 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$$

$$\text{ज्या } 18^\circ = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1), \text{ कोज्या } 36^\circ = \frac{1}{2} (\sqrt{5} + 1),$$

$$\text{स्प } 36^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1}$$

$$\text{सी } \frac{\text{ज्या अ}}{\text{अ} \rightarrow 0} = 1, \text{ सी कोज्या अ} = 1, \text{ सी } \frac{\text{स्प अ}}{\text{अ} \rightarrow 0} = 1$$

४. ज्या $(-अ) = \text{ज्या अ}$, कोज्या $(-अ) = \text{कोज्या अ}$
ज्या $(90^\circ - अ) = \text{कोज्या अ}$,
कोज्या $(90^\circ - अ) = \text{ज्या अ}$
ज्या $(90^\circ + अ) = \text{कोज्या अ}$,
कोज्या $(90^\circ + अ) = -\text{ज्या अ}$
ज्या $(180^\circ - अ) = \text{ज्या अ}$,
कोज्या $(180^\circ - अ) = -\text{कोज्या अ}$
ज्या $(180^\circ + अ) = -\text{ज्या अ}$,
कोज्या $(180^\circ + अ) = -\text{कोज्या अ}$

५. यदि ज्या अ = ज्या इ, तो अ = स प्या $\pm (-1)^n$ इ
यदि कोज्या अ = कोज्या इ, तो अ = स प्या \pm इ
यदि स्प अ = स्प इ, तो अ = स प्या \pm इ

६. ज्या $(क + ख)$
= ज्या क कोज्या ख + कोज्या क ज्या ख

कोज्या (क + ख)

= कोज्या क कोज्या ख - ज्या क ज्या ख.

$$\text{स्प (क + ख)} = \frac{\text{स्प क} + \text{स्प ख}}{1 - \text{स्प क स्प ख}}$$

ज्या (क - ख)

= ज्या क कोज्या ख - कोज्या क ज्या ख

कोज्या (क - ख)

= कोज्या क कोज्या ख + ज्या क ज्या ख

$$\text{स्प (क - ख)} = \frac{\text{स्प क} - \text{स्प ख}}{1 + \text{स्प क} \times \text{स्प ख}}$$

७. $२ \text{ ज्या क कोज्या ख} = \text{ज्या (क + ख)} + \text{ज्या (क - ख)}$

$२ \text{ कोज्या क ज्या ख} = \text{ज्या (क + ख)} - \text{ज्या (क - ख)}$

$२ \text{ कोज्या क कोज्या ख} = \text{कोज्या (क + ख)} + \text{कोज्या (क - ख)}$

$२ \text{ ज्या क ज्या ख} = \text{कोज्या (क - ख)} - \text{कोज्या (क + ख)}$

$\text{ज्या ग} + \text{ज्या घ} = २ \text{ ज्या } \frac{\text{ग} + \text{घ}}{२} \text{ कोज्या } \frac{\text{ग} - \text{घ}}{२}$

$\text{ज्या ग} - \text{ज्या घ} = २ \text{ कोज्या } \frac{\text{ग} + \text{घ}}{२} \text{ ज्या } \frac{\text{ग} - \text{घ}}{२}$

$\text{कोज्या ग} + \text{कोज्या घ} = २ \text{ कोज्या } \frac{\text{ग} + \text{घ}}{२} \text{ कोज्या } \frac{\text{ग} - \text{घ}}{२}$

$$. \text{ कोज्या ग} - \text{कोज्या घ} = २ज्या \frac{ग+घ}{२} ज्या \frac{घ-ग}{२}$$

$$\begin{aligned} \text{८. ज्या २ क} &= २ ज्या क कोज्या क \\ \text{कोज्या २ क} &= \text{कोज्या}^२ क - ज्या^२ क = २ कोज्या^२ क - १ \\ &= १ - २ज्या^२ क \end{aligned}$$

$$\text{स्प २ क} = \frac{२ स्प क}{१ - स्प^२ क}$$

$$\text{ज्या ३ क} = ३ज्या क - ४ ज्या^३ क$$

$$\text{कोज्या ३ क} = ४ कोज्या^३ क - ३कोज्या क$$

$$\text{स्प ३ क} = \frac{३स्प क - स्प^३ क}{१ - ३स्प^२ क}$$

$$९. ज्या क = २ ज्या \frac{क}{२} कोज्या \frac{क}{२}$$

$$\begin{aligned} \text{कोज्या क} &= \text{कोज्या}^२ \frac{क}{२} - ज्या^२ \frac{क}{२} = २कोज्या^२ \frac{क}{२} - १ \\ &= १ - २ज्या^२ \frac{क}{२} \end{aligned}$$

$$\text{स्प क} = \frac{२स्प \frac{क}{२}}{१ - स्प^२ \frac{क}{२}}$$

$$\text{— ज्या क} = \frac{२स्प \frac{क}{२}}{१ + स्प^२ \frac{क}{२}}$$

$$\text{कोज्या ष} = \frac{1 - \text{स्प}^2 \frac{\text{क}}{2}}{1 + \text{स्प}^2 \frac{\text{क}}{2}}$$

$$1 - \text{कोज्या क} = 2 \text{ज्या}^2 \frac{\text{क}}{2}$$

$$1 + \text{कोज्या क} = 2 \text{कोज्या}^2 \frac{\text{क}}{2}$$

$$\frac{1 - \text{कोज्या क}}{1 + \text{कोज्या क}} = \text{स्प}^2 \frac{\text{क}}{2}$$

$$१० \quad \frac{\text{ज्या क}}{\text{का}} = \frac{\text{ज्या ख}}{\text{खा}} = \frac{\text{ज्या ग}}{\text{गा}}$$

$$\text{कोज्या क} = \frac{\text{खा}^2 + \text{गा}^2 - \text{का}^2}{2 \text{खा गा}}, \quad \text{इत्यादि}$$

$$\text{का} = \text{खा कोज्या ग} + \text{गा कोज्या ख}, \quad \text{इत्यादि}$$

$$\text{ज्या} \frac{\text{क}}{2} = \sqrt{\frac{(\text{सा} - \text{खा})(\text{सा} - \text{गा})}{\text{खा गा}}}, \quad \text{इत्यादि}$$

$$\text{कोज्या} \frac{\text{क}}{2} = \sqrt{\frac{\text{सा} (\text{सा} - \text{का})}{\text{खा गा}}}, \quad \text{इत्यादि}$$

$$\text{स्प} \frac{\text{क}}{2} = \sqrt{\frac{(\text{सा} - \text{खा})(\text{सा} - \text{गा})}{\text{सा} (\text{सा} - \text{का})}}, \quad \text{इत्यादि}$$

ज्या क

$$= \frac{2}{\text{खा गा}} \sqrt{\text{सा} (\text{सा} - \text{का})(\text{सा} - \text{खा})(\text{सा} - \text{गा})}, \quad \text{इत्यादि}$$

$$\text{स्प } \left(\frac{\text{ख} - \text{ग}}{2} \right) = \left(\frac{\text{खा} - \text{गा}}{\text{खा} + \text{गा}} \right) \text{ कोस्प } \frac{\text{क}}{2}, \dots \dots \text{इत्यादि}$$

$$११. \quad \Delta = \frac{१}{२} \text{ खा गा ज्या क} = \frac{१}{२} \text{ गा का ज्या ख}$$

$$= \frac{१}{२} \text{ का खा ज्या ग}$$

$$= \sqrt{\text{सा} (\text{सा} - \text{का}) (\text{सा} - \text{खा}) (\text{सा} - \text{गा})}$$

$$\text{घा} = \frac{\text{का}}{२ \text{ ज्या क}} = \frac{\text{खा}}{२ \text{ ज्या ख}} = \frac{\text{गा}}{२ \text{ ज्या ग}} = \frac{\text{काखागा}}{४ \Delta}$$

$$\text{अ} = \frac{\Delta}{\text{सा}} = (\text{सा} - \text{का}) \text{स्प } \frac{\text{क}}{२} = (\text{सा} - \text{खा}) \text{स्प } \frac{\text{ख}}{२}$$

$$= (\text{सा} - \text{गा}) \text{स्प } \frac{\text{ग}}{२} = ४ \text{ अ ज्या } \frac{\text{क}}{२} \text{ ज्या } \frac{\text{ख}}{२} \text{ ज्या } \frac{\text{ग}}{२}$$

$$\text{अ}_1 = \frac{\Delta}{\text{सा} - \text{का}}$$

$$= \text{सास्प } \frac{\text{क}}{२} \cdot ४ \text{ अ ज्या } \frac{\text{क}}{२} \text{ को ज्या } \frac{\text{ख}}{२} \text{ को ज्या } \frac{\text{ग}}{२}$$

$$१२. \quad \text{वृत्तीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल}$$

$$= \sqrt{(\text{सा} - \text{का}) (\text{सा} - \text{खा}) (\text{सा} - \text{गा}) (\text{सा} - \text{घा})}$$

$$\text{वृत्त का क्षेत्रफल} = \text{प्या अ}^२$$

$$૧૩. \text{એકમન} = \text{એકમ} + \text{એકન}$$

$$\text{એકમ} = \text{એકમ} - \text{એકન}$$

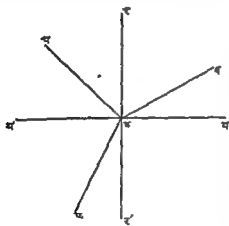
$$\text{એકમ}^n = n \times \text{એકમ}$$

$$\text{એકમ} = \text{એકમ} \times \text{એકમ}$$

पहला अध्याय

कोण-मापन (Measurement of Angles)

११ त्रिकोणमिति (trigonometry) के कोण (angles) —रैखिकी (geometry) के अध्ययन से यह ज्ञात होता है कि दो सरल रेखाओं के मिश्रदृष्टेदन (intersection) से एक कोण बनता है; और इस कोण की अर्ही (value) सदा 0° और 360° के बीच होती है। यह कोण रैखिकी में सदा घन माना जाता है। त्रिकोणमिति में कोणों की कल्पना (conception) अधिक व्यापक है।



आ. १.१

मान लिया जाय कि मव रेखा एक ही समतल (plane) में म विंदु के चारों ओर घूम सकती है। यह रेखा प्रारंभिक स्थिति (initial-position) मय से चल कर प्रतिघटीवत् (anticlockwise) परिभ्रमण (revolve) करने के पश्चात् स्थिति मय पर पहुंचती है।

प्रारंभिक स्थिति मय से अंतिम स्थिति मय पर पहुँचने तक मय रेखा जिस कोण का अनुरेखन (trace) करती है वही मय और मय के बीच के कोण का माप (measure) है।

यदि मय परिभ्रमण रेखा (revolving line) मय स्थिति से घूमना आरम्भ कर प्रतिघटीयत् घूमती हुई मय स्थिति पर आकर रुके तो यमय न्यून कोण (acute angle) बनता है। यदि वह स्थिति मय पर रुकती है तो जो कमय कोण बनता है वह दो लम्बकोणों (right angle) से बड़ा होता है। यदि म के चारों ओर एक पूर्ण परिभ्रमण करने के पश्चात् परिभ्रमण रेखा पुनः मय पर रुके तो अनुरेखित कोण चार लम्ब कोण $+ \angle$ यमय के सम होता है। मय रेखा का परिभ्रमण घटीयत् (clockwise) अथवा प्रतिघटीयत् हो सकता है। रूढी (convention) के अनुसार प्रतिघटीयत् भ्रमण से बनने वाले कोण धन (positive) और घटीयत् भ्रमण से बनने वाले कोण ऋण (negative) माने जाते हैं। इस प्रकार त्रिकोणमिति में कोण, किसी भी महत्ता (magnitude) के और किसी भी चिह्न के (धन अथवा ऋण) हो सकते हैं।

म को मूल बिन्दु (origin), मय को आदि-रेखा (initial line) और मय परिभ्रमण-रेखा को सदिश-त्रिज्या (radius vector) कहते हैं। रेखा यम को य' तक बढ़ाओ और उस पर रमर' लम्ब (perpendicular) खींचो। अब सम्पूर्ण समतल के चार विभाग हो जाते हैं जिनको चरण (quadrants) कहते हैं।

यमर पहिला चरण, रमय' दुसरा चरण, य'मर' तीसरा चरण और र'मय चौथा चरण है ।

उदाहरण :— निम्नलिखित कोणों का अनुरेखण करो;

$$(1) 1000^\circ$$

$$(4) - 614^\circ$$

१.२ कोण के मापन की तीन पद्धतियाँ हैं ।

षाष्टिक (sexagesimal) पद्धति में एक लम्ब कोण के ९० समभाग किए जाते हैं । प्रत्येक भाग एक अंश (degree) कहलाता है । प्रत्येक अंश के पुनः ६० समभाग किए जाते हैं । प्रत्येक भाग कला (minute) कहलाता है । फिर प्रत्येक कला के ६० समभाग किए जाते हैं और प्रत्येक भाग काष्ठिका (second) कहलाता है ।

$$\therefore 1 \text{ लम्ब कोण} = 90^\circ (\text{अंश})$$

$$1^\circ = 60' (\text{कला})$$

$$1' = 60'' (\text{काष्ठिका})$$

१.२१: शतिक (centesimal) पद्धति में एक लम्ब कोण के १०० समभाग किए जाते हैं । प्रत्येक भाग अंशक (grade) कहलाता है । प्रत्येक अंशक १०० कलाओं में और प्रत्येक कला १०० काष्ठिकाओं में विभाजित की जाती है ।

$$\therefore 1 \text{ लम्ब कोण} = 100^\circ (\text{अंशक})$$

$$1^\circ = 100' (\text{कला})$$

$$1' = 100'' (\text{काष्ठिका})$$

१.२२ कोण-मापन की एक पद्धति का दूसरी पद्धति में परिवर्तन

$$१ \text{ लम्ब कोण} = ९०^{\circ} = १०० \text{ अं}$$

$$\therefore १^{\circ} = \left(\frac{१०}{९}\right)^{\text{अं}}$$

$$\text{और } १ \text{ अं} = \left(\frac{९}{१०}\right)^{\circ}$$

उदाहरण १ — शक्ति माप में व्यक्त करो—

$$(१) ४१^{\circ} २२' ३९''$$

$$(२) १५^{\circ} ३२' ५१''$$

उदाहरण २ — काष्ठिक माप में व्यक्त करो—

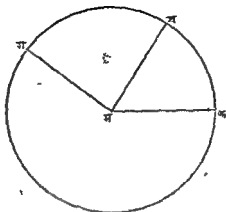
$$(१) ७२^{\text{अं}} ४३' ६७''$$

$$(२) ८७^{\text{अं}} १३' ५५''$$

१.३ आरीय (radian) अथवा घूर्णल (circular) माप—

किसी वृत्त (circle) की त्रिज्या (radius) सम लम्बाई वाले चाप (arc) द्वारा वृत्तकेन्द्र (centre) पर आपातित (subtended) कोण को आर (radian) कहते हैं।

दी हुई आकृति (figure) में वृत्त कक्ष का केन्द्र म है और कक्ष चाप वृत्त की त्रिज्या के सम लम्बा है। अतः कोण कमल का माप एक आर होगा। कोण कमल १ अं से दर्शाया जाता है।



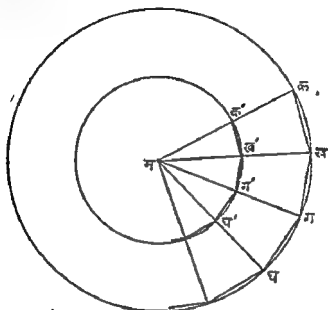
आ. १.९

किसी भी कोण कमग का आरीय माप (circular measure) उसमें बारों की संख्या के समान है ।

१.४ किसी भी वृत्त की परिधि (circumference) और व्यास (diameter) की निष्पत्ति (ratio) अचल (constant) रहती है ।

बिन्दु म को केन्द्र मान कर दो वृत्त खींचो । बाहर वाले वृत्त में क ख ग घ , स भुजाओं के एक नियमित (regular) बहुभुज (polygon) का अन्तर्लेखन (inscribe) करो । इसकी कुछ त्रिज्याएं नक, मख, मग, मघ, लो जो अन्दर के वृत्त को क', ख', ग', घ', बिन्दुओं पर छेदती हों । क'ख', ख'ग', ग'घ', को मिलाने से

अन्दर के चूत्त में भी स मुजाओं का एक नियमित बहुभुज फ'ख'ग'घ'. अन्तर्लिखित होता है।



आ १३

अथ, मक = मख

और मक' = मख'

अथ त्रिभुज मकख और मक'ख' से,

$$\frac{\text{म क}}{\text{म क}'} = \frac{\text{म ख}}{\text{म ख}'}$$

और \angle म उभय साधारण (common to both) है
अतः ये दोनों त्रिभुज समरूप (similar) हैं।

$$\therefore \frac{\text{क ख म क}}{\text{क' ख' म क'}}$$

तो $\frac{\text{बहुभुज कखगघ...का परिमाप (perimeter)}}{\text{बहुभुज क'ख'ग'घ'... का परिमाप}} = \frac{\text{स.कख}}{\text{स. क'ख'}}$

$$= \frac{\text{कख}}{\text{क'ख'}}$$

$$= \frac{\text{म क}}{\text{म क'}}$$

भुजाओं की संख्या स चोहे कुछ भी हो यह सम्बन्ध सदा सत्य रहेगा। यदि संख्या स अनंत (infinite) बना दी जाय तो बहुभुजों के परिमाप संवादी (corresponding) वृत्तों की परिधि से लगभग संपाती (coincident) हो जायेंगे। इसलिये

$$\frac{\text{वृत्त कखगघ...की परिधि}}{\text{वृत्त क'ख'ग'घ'...की परिधि}} = \frac{\text{म क}}{\text{म क'}}$$

$$= \frac{\text{वृत्त कखगघ...की त्रिज्या}}{\text{वृत्त क'ख'ग'घ'...की त्रिज्या}}$$

अथवा

$$\frac{\text{वृत्त कखगघ...की परिधि}}{\text{वृत्त क'ख'ग'घ'...की त्रिज्या}} = \frac{\text{वृत्त क'ख'ग'घ'...की परिधि}}{\text{वृत्त क'ख'ग'घ'...की त्रिज्या}}$$

क्योंकि दोनों वृत्तों के आकार पर किसी प्रकार नियन्त्र (restriction) नहीं रखा गया है इसलिये

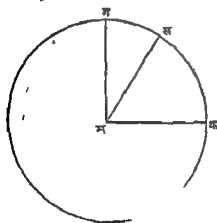
$$\frac{\text{वृत्त-परिधि}}{\text{वृत्त-त्रिज्या}} \text{ निष्पत्ति प्रत्येक वृत्त के लिए एक ही}$$

होनी चाहिए। और क्योंकि किसी भी वृत्त का व्यास उसकी त्रिज्या से दुगुना होता है इस लिए $\frac{\text{वृत्त परिधि}}{\text{वृत्त व्यास}}$

निष्पत्ति भी एक स्थिरांक (constant number) है। यह स्थिरांक 'प्या' अक्षर से दर्शाया जाता है। इसकी अर्था लगभग ३.१४१५९..... है।

उपप्रेम्य— यदि किसी वृत्त की त्रिज्या r हो तो उसकी परिधि = $२ \pi r$
 = $२ \text{ प्या. } r$.

१.५ एक लम्ब कोण में आरों की संख्या निर्दिष्ट करना:—



आ. १.४

म बिंदु, वृत्त का केन्द्र है और r इस वृत्त की त्रिज्या है।
 $\angle \text{कमर्ग} = ९०^\circ$ और
 $\angle \text{कमस} = १$ भा

क्योंकि वृत्त के किसी चाप द्वारा केन्द्र पर आपातित कोण उस चाप की लम्बाई का अनुपाती (proportional) है,

$$\therefore \frac{\angle \text{कम ग चाप कग}}{\angle \text{कम ख चाप कख}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{8} \text{ परिधि}}{\text{त्रिज्या}} = \frac{\frac{1}{8} (2 \text{ प्या.त्र})}{\text{त्र}} \\ = \frac{\text{प्या}}{2}$$

$$\angle \text{कम ग} = \frac{\text{प्या}}{2} \angle \text{कम ख} \\ = \left(\frac{\text{प्या}}{2} \right)^{\text{आ}}$$

\therefore एक लम्ब कोण $\frac{\text{प्या}}{2}$ आरों के सम है।

$$\text{अथवा } 1 \text{ आर} = \left(\frac{2}{\text{प्या}} \right) \times 1 \text{ लम्ब कोण}$$

परंतु प्या एक स्थिरांक है,

इसलिए 1 आर एक अवल कोण है।

१.६ आर की महत्ता—

$$1^{\text{आ}} = \frac{2}{\text{प्या}} \times 1 \text{ लम्ब कोण} \\ = \frac{2 \times 90^\circ}{\text{प्या}}$$

$$= 180^\circ \times (0.314159\dots)$$

$$= 56.5^\circ \times 294\dots$$

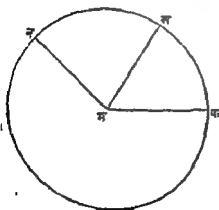
$$= 57^\circ 17' 44.4'' \quad (\text{लगभग})$$

१.७ निम्नलिखित सूत्र की सहायता से आरीय, षाष्टिक और शक्तिक मापों में परस्पर सम्बन्ध ज्ञात होता है।

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^\circ = 90^\circ = 100^\circ$$

प्या का मूर्धांक मायः लिखा नहीं जाता, मान लिया जाता है।

$$१.८ \quad \text{किसी भी कोण का आरीय माप} = \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}}$$



आ. १०५

मान लिया जाय कि कम्प कोई भी एक कोण है जिसका आरी माप निकालना है। म को केन्द्र मानकर मक के सम त्रिज्या का एक वृत्त खींचो जो मक और मव का क्रमशः (respectively) क और व में छेदन करे। परिधि पर बिंदु ख इस प्रकार लो कि

चाप कख = वृत्त-त्रिज्या
 म और ख को मिलाओ।

तो \angle कमख = $1^{\text{अ}}$

\therefore रैखिकी से,

$$\frac{\angle \text{कमय}}{\angle \text{कमख}} = \frac{\text{चाप कय}}{\text{चाप कख}}$$

$$= \frac{\text{चाप कय}}{\text{त्रिज्या}}$$

$$\therefore \angle \text{कमय} = \left(\frac{\text{चाप कय}}{\text{त्रिज्या}} \right) \times \angle \text{कमख}$$

$$= \frac{\text{चाप कय}}{\text{त्रिज्या}} \times 1^{\text{अ}}$$

\therefore यदि कोण कमय का आरीय माप 'अ' हो चाप कय की लम्बाई 'घ' हो और वृत्त-त्रिज्या 'त्र' हो तो

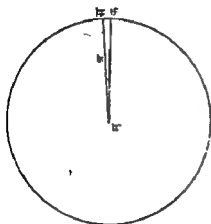
$$\text{अ} = \frac{\text{घ}}{\text{त्र}}$$

अथवा घ = त्र. अ

१.९ उदाहरण १:— यदि किसी गोल (sphere) के एक ही ध्रुव-वृत्त (meridian) पर स्थित दो बिंदुओं के अक्षवृत्तों (latitudes) का अंतर $3^{\circ} 7' 30''$ है और गोल-तल

(surface of sphere) पर मापित उनके बीच की दूरी ५ प्रांगुल (inch) है तो गोल की त्रिज्या का निश्चय करो।

$$\left(\frac{r}{\text{प्या}} = 31.831 \right)$$



आ १०६

तो $\frac{\text{चाप कख}}{\text{त्रिज्या}} = \angle$ कमख का मापीय माप

चाप कख = ५ प्रांगुल

और \angle कमख = $3^{\circ} 6' 30''$

$\therefore \frac{5}{\text{त्रि}} = \text{कोण } (3^{\circ} 6' 30'')$ में आरों की संख्या

= कोण $\left(3 \frac{1}{2}^{\circ} \right)$ में आरों की संख्या

= कोण $3 \frac{1}{2} \times \frac{\text{प्या}}{180}$

ध्रुव-वृत्त समतल
(meridian plane)

कमख द्वारा गोल का
छेद (section) आकृति
में दर्शाया गया है।

बिंदु म गोल का केन्द्र
और व उसकी त्रिज्या
है।

$$\therefore z = \frac{4 \times 6 \times 100}{24 \times 7} = 24 \times 21.43$$

$$= 21.43 \times 24 \dots \text{प्रांगुल}$$

उदाहरण २:— एक त्रिभुज के कोण समान्तर श्रेणी (arithmetical progression) में हैं। यदि

उसके लघुतम कोण में अंशों की संख्या $= \frac{\text{प्या}}{100}$ हो तो उसके महत्तम कोण में अंशों की संख्या $= \frac{\text{प्या}}{100}$ हो तो

त्रिभुज के कोण अंशों में व्यक्त करो।

मान लो कि त्रिभुज के कोण $(y-r)^\circ$, y° और $(y+r)^\circ$ हैं।

त्रिभुज के तीन कोणों का योग 180° है,

$$\therefore (y-r) + y + (y+r) = 180$$

$$\text{अथवा } 3y = 180$$

$$\therefore y = 60$$

\therefore त्रिभुज के कोण $(60-r)^\circ$, 60° और $(60+r)^\circ$ हैं।

$$\text{अब } (60-r)^\circ = \left\{ \frac{\text{प्या}}{180} (60-r) \right\}^\circ$$

$$\text{और } (60+r)^\circ = \left\{ (60+r) \frac{10}{9} \right\}^\circ$$

\therefore प्रदानानुसार,

$$\frac{\text{प्या } (६० - र)}{१८०} = \frac{\text{प्या}}{(६० + र) \frac{१०}{९}} = \frac{\text{प्या}}{४००}$$

$$\text{अथवा } \frac{\text{प्या}}{२००} \left(\frac{६० - र}{६० + र} \right) = \frac{\text{प्या}}{४००}$$

$$\text{अथवा } २ (६० - र) = ६० + र$$

$$\therefore र = २०$$

\therefore अवेक्षित तीन कोण ८०° , ६०° और ८०° हैं।

प्रश्नावलि १

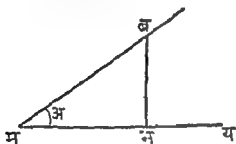
१. ४२ प्रांगुल का एक घूर्तुल विम्ब (disk) भूमि पर घूमता हुआ छोड़ा जाता है। निश्चय करो कि विम्ब के एक पूर्ण परिभ्रमण में उसका केन्द्र कितनी दूर आगे बढ़ेगा। (प्या = $\frac{२२}{७}$)

२. एक छोटा कीड़ा एक स्थिर (fixed) एकरूप (uniform) वृत्ताकार तार पर चल रहा है। यह प्रत्येक कला (minute of time) में १३२ शतिमान (centimetre) के अर्घ (rate) से चलता हुआ १७ कलामों में तार की तीन पूरी प्रदक्षिणाएँ कर लेता है। उस वृत्ताकार तार की विज्या निकालो।
($\frac{१}{\text{प्या}} = ०.३१८३१$)

३. दो नियमित बहुभुजों की भुजाओं की संख्याओं की निष्पत्ति २:७ है। पहिले बहुभुज के एक कोण में अंशों की संख्या और दूसरे बहुभुज के एक कोण में अंशों की संख्या ४२:५५ निष्पत्ति में है। बहुभुजों की भुजाओं की संख्या निश्चित करो।
४. एक पंचभुज (pentagon) के कोण समान्तर थेडी में हैं और उसका महत्तम कोण उसके लघुत्तम कोण से दुगुना है तो पंचभुज के कोणों की अर्हाप अंशों में और आरीय माप में निकालो।
५. (१) २॥ वजे (२) ७ वजकर २० फला पर और (३) पौने दस वजे घड़ी के कांटों के बीच के कोणों को अंशों, अंशकों और आरों में व्यक्त करो।
६. कितनी दूरी पर ५ पाद (feet) ऊंचा एक मनुष्य २०' के कोण का आपातन करेगा? $\left(\frac{1}{\text{व्या}} = .३१८३१\right)$

दूसरा अध्याय

न्यून कोणों की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियाँ



आ. २.१

मान लो कि यमय एक न्यूनकोण है जिसका माप अ है। रेखा मय पर कोई बिंदु य लेकर मय पर यम लंब खींचो।

$\triangle यमम$ में मय

कर्ण (hypotenuse), यम लंब और मम आधार (base) है।

तो कोण अ की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों की परिभाषाएँ (definitions) इस प्रकार हैं।

कोण अ की ज्या (sine) अथवा $\text{ज्या}(अ) = \frac{\text{मय}}{\text{मम}} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$

कोण अ की कोटिज्या (cosine)

अथवा $\text{कोज्या}(अ) = \frac{\text{मम}}{\text{मम}} = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$

कोण अ की स्पज्या (tangent) अथवा $\text{स्प}(अ) = \frac{\text{मय}}{\text{मम}} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$

कोण अ की व्युत्क्रमज्या (cosecant).

$$\text{अथवा व्युज्ज्या(अ)} = \frac{\text{मव}}{\text{मभ}} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}$$

कोण अ की व्युत्क्रम कोटिज्या (secant)

$$\text{अथवा व्युत्कोज्या(अ)} = \frac{\text{मय}}{\text{मभ}} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$$

कोण अ की कोटि स्पज्या (cotangent) अथवा कोस्प

$$(\text{अ}) = \frac{\text{मभ}}{\text{मय}} = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$$

इन छे निष्पत्तियों के अतिरिक्त दो और निष्पत्तियां होती हैं जिनका उपयोग बहुत कम होता है। ये निम्नलिखित हैं:—

कोण अ की उत्क्रमज्या (versed sine)

$$\text{अथवा उज्या(अ)} = 1 - \text{कोज्या(अ)}$$

कोण अ की उत्क्रम कोटिज्या (covered sine) अथवा

$$\text{उत्को(अ)} = 1 - \text{ज्या(अ)}$$

ध्यान रखना चाहिए कि इनमें से प्रत्येक त्रिकोणमितीय निष्पत्ति दो आयामों (length) की निष्पत्ति होने के कारण केवल एक संख्यात्मक (numerical) राशि (quantity) है।

२.२ त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों की अर्थाओं की सीमा (limits) पिछले अनुच्छेद (last article) की आकृति से यह स्पष्ट है कि कोण अ की अर्हा चाहे कुछ भी हो, परन्तु

$$\text{वम} < \text{मन}$$

$$\text{और मभ} < \text{मव}$$

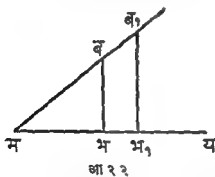
इसलिए किसी भी कोण की ज्या और कोटिज्या १ से अधिक कदापि नहीं हो सकती।

इसी प्रकार किसी भी कोण की व्युत्क्रम कोटिज्या और व्युत्क्रम ज्या १ से कम कदापि नहीं हो सकती।

\angle यमभ की भिन्न २ अर्धांशों के अनुसार भय और मभ स्वतन्त्ररूप से कोई भी अर्धांश प्राप्त कर सकती हैं अतः स्पज्या और कोटि स्पज्या की अर्धांशों की कोई सीमा निर्दिष्ट नहीं की जा सकती।

इनकी अर्धांश शून्य से लेकर अनन्ती (infinity) तक हो सकती हैं।

२.३ किसी भी दत्त कोण की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियाँ सदा अपरिवर्ती होती हैं।



मान लें यमव एक कोण है। रेखा भय पर व और व_१ दो बिंदु लें। अब व और व_१ से रेखा भय पर क्रमशः यम और व_१म, लम्ब खींचो। त्रिभुज यमभ और व_१मभ, में कोण म साधारण है,

$$\angle व म भ = \angle व_१ म भ (\because \text{प्रत्येक} = १ \text{ लम्बकोण})$$

\therefore त्रिभुज यमभ और व_१मभ समरूप हैं।

$$\text{अतः } \frac{\text{भव}}{\text{मव}} = \frac{\text{म, य,}}{\text{मव,}}$$

इसका अर्थ यह है कि व चिन्दु मव रेखा पर चाहे कहीं भी रहे, कोण यमव की ज्या की अर्धा सदा एक ही रहती है। इसी प्रकार यह भी सिद्ध किया जा सकता है कि \angle यमव की (अर्थात् किसी भी कोण. की) अन्य त्रिकोणमितीय निष्पत्तियां भी सदा एक ही रहती हैं।

२.४ व्युत्क्रम सम्बन्ध (reciprocal relations) —
अनुच्छेद २.१ की आकृति से,

$$\begin{aligned} \text{ज्या (अ) व्युज्ज्या (अ)} &= \frac{\text{भव}}{\text{मव}} \times \frac{\text{मव}}{\text{भव}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{व्युज्ज्या (अ)} = \frac{1}{\text{ज्या (अ)}} \dots\dots\dots (१)$$

इसी प्रकार यह भी दिखाया जा सकता है

$$\text{कि व्युत्कोज्या (अ)} = \frac{1}{\text{कोज्या (अ)}} \dots\dots\dots (२)$$

$$\text{और कोस्प (अ)} = \frac{1}{\text{स्प (अ)}} \dots\dots\dots (३)$$

आलोक (note) :— अब आगे ज्या (अ), कोज्या (अ), स्प(अ) इत्यादि निष्पत्तियां क्रमशः ज्याअ, कोज्याअ, स्पअ इस प्रकार लिखी जायेंगी।

२.५ मूलभूत ऐकात्म्य (fundamental identities)—
अनुच्छेद २.१ की आकृति में,

$$\angle \text{ममव} = 90^\circ$$

$$\therefore \text{मव}^2 = \text{भव}^2 + \text{मभ}^2$$

इस समीकार को क्रमशः मव^२, मभ^२ और भव^२ से भाग देने पर,

$$\left(\frac{\text{भव}}{\text{मव}}\right)^2 + \left(\frac{\text{मभ}}{\text{मव}}\right)^2 = 1 \dots\dots\dots(\text{क})$$

$$\left(\frac{\text{मव}}{\text{मभ}}\right)^2 = \left(\frac{\text{भव}}{\text{मभ}}\right)^2 + 1 \dots\dots\dots(\text{ख})$$

$$\text{और } \left(\frac{\text{मव}}{\text{भव}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\text{मभ}}{\text{भव}}\right)^2 \dots\dots\dots(\text{ग})$$

त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों की परिभाषाओं के अनुसार संबंध (क) का निम्नलिखित रूपान्तरण (transformation) हो जाता है—

$$(\text{ज्याअ})^2 + (\text{कोज्याअ})^2 = 1$$

$$\text{अथवा ज्या}^2 \text{ अ} + \text{कोज्या}^2 \text{ अ} = 1 \dots\dots\dots(\text{घ})$$

इसी प्रकार संबंध (ख) और (ग) का क्रमशः

(५) और (६) में रूपान्तरण हो जाता है—

$$\text{व्युत्कोज्या}^2 \text{ अ} = 1 + \text{स्प}^2 \text{ अ} \dots\dots\dots(\text{५})$$

$$\text{व्युज्ज्या}^2 \text{ अ} = 1 + \text{कोस्प}^2 \text{ अ} \dots\dots\dots(\text{६})$$

$$\text{मव} \quad \frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}} = \frac{\text{मव' मव}}{\text{मभ' मव}} = \frac{\text{मव}}{\text{मभ}} = \text{स्प अ}$$

$$\text{अर्थात् स्प अ} = \frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}} \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{इसी प्रकार कोस्प अ} = \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}} \dots\dots\dots (4)$$

२.६ अब ऊपर सिद्ध किए गए मूलभूत सम्बन्धों के आधार पर कुछ उदाहरण साधित (solved) किए जायेंगे।

उदाहरण १— सिद्ध करो कि

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1 - \text{ज्या अ}}{1 + \text{ज्या अ}}} \sqrt{\frac{\text{व्युत्कोज्या अ} + 1}{\text{व्युत्कोज्या अ} - 1}} \\ = \text{कोस्प अ} \left(\frac{1 + \text{कोज्या अ}}{1 + \text{ज्या अ}} \right) \end{aligned}$$

$$\text{वाम पक्ष} = \sqrt{\frac{1 - \text{ज्या}^2 \text{ अ}}{(1 + \text{ज्या अ})^2}} \sqrt{\frac{(\text{व्युत्कोज्या अ} + 1)^2}{\text{व्युत्कोज्या}^2 \text{ अ} - 1}}$$

$$= \frac{\text{कोज्या अ}}{1 + \text{ज्या अ}} \times \frac{\text{व्युत्कोज्या अ} + 1}{\text{स्प अ}}$$

$$= \frac{1 + \text{कोज्या अ}}{(1 + \text{ज्या अ}) \text{ स्प अ}} \text{ गतानुच्छेद के}$$

(४) और (५) से

$$= \text{कोस्प अ} \cdot \frac{1 + \text{कोज्या अ}}{1 + \text{ज्या अ}}$$

$$= \text{दक्षिण-पक्ष}$$

उदाहरण २— सिद्ध करो कि

$$(1 + \text{कोस्प अ} - \text{व्युज्या अ})(1 + \text{स्प अ} + \text{व्युत्कोज्या अ}) = 2$$

$$\begin{aligned}
\text{घाम पक्ष} &= \left(1 + \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}} - \frac{1}{\text{ज्या अ}}\right) \\
&\quad \times \left(1 + \frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}} + \frac{1}{\text{कोज्या अ}}\right) \\
&= \left(\frac{\text{कोज्या अ} + \text{ज्या अ} - 1}{\text{ज्या अ}}\right) \\
&\quad \times \left(\frac{\text{कोज्या अ} + \text{ज्या अ} + 1}{\text{कोज्या अ}}\right) \\
&= \frac{(\text{कोज्या अ} + \text{ज्या अ})^2 - 1}{\text{ज्या अ. कोज्या अ}} \\
&= \frac{\text{कोज्या}^2 \text{ अ} + \text{ज्या}^2 \text{ अ} + 2 \text{ ज्या अ कोज्या अ} - 1}{\text{ज्या अ. कोज्या अ}} \\
&= \frac{2 \text{ ज्या अ. कोज्या अ}}{\text{ज्या अ. कोज्या अ}} \\
&\quad \times (\because \text{ज्या}^2 \text{ अ} + \text{कोज्या}^2 \text{ अ} = 1) \\
&= 2
\end{aligned}$$

उदाहरण ३— सिद्ध करो कि

$$\begin{aligned}
\text{कोज्या}^4 \text{ अ} + \text{ज्या}^4 \text{ अ} &= 1 - 2 \text{ ज्या}^2 \text{ अ} (1 - \text{ज्या}^2 \text{ अ}) \\
&= 1 - 2 \text{ कोज्या}^2 \text{ अ} (1 - \text{कोज्या}^2 \text{ अ})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{घाम पक्ष} &= (\text{कोज्या}^4 \text{ अ} + \text{ज्या}^4 \text{ अ}) \times \\
&\quad (\text{कोज्या}^4 \text{ अ} - \text{कोज्या}^2 \text{ अ ज्या}^2 \text{ अ} + \text{ज्या}^4 \text{ अ})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{कोज्या}^2 \text{ अ} - \text{कोज्या}^2 \text{ अ ज्या}^2 \text{ अ} + \text{ज्या}^4 \text{ अ} \\
&\quad [\because \text{ज्या}^2 \text{ अ} + \text{कोज्या}^2 \text{ अ} = 1] \\
&= (\text{कोज्या}^2 \text{ अ} + \text{ज्या}^2 \text{ अ})^2 \\
&\quad - 2 \text{ कोज्या}^2 \text{ अ ज्या}^2 \text{ अ} \\
&= 1 - 2 \text{ ज्या}^2 \text{ अ} (1 - \text{ज्या}^2 \text{ अ}) \\
&= 1 - 2 \text{ कोज्या}^2 \text{ अ} (1 - \text{कोज्या}^2 \text{ अ})
\end{aligned}$$

प्रभावलि २

निम्नलिखित ऐकात्म्यों को सिद्ध करो:—

- (१) $\frac{\text{ज्या अ} + \text{व्युत्कोज्या अ}}{\text{कोज्या अ} + \text{व्युज्या अ}} = \text{स्प अ} \quad [\text{यनारस १९३८}]$
- (२) $\text{व्युज्या}^2 \text{ अ} - \text{कोस्प}^2 \text{ अ} = 1 + 2 \text{ कोस्प}^2 \text{ अ}$
- (३) $\text{व्युत्कोज्या अ} - \text{स्प अ} = \frac{\text{कोस्प अ}}{1 + \text{व्युज्या अ}}$
- (४) $\sqrt{\frac{\text{व्युत्कोज्या अ} - 1}{\text{व्युत्कोज्या अ} + 1}} = \text{व्युज्या अ} - \text{कोस्प अ}$
- (५) $\frac{\text{कोस्प अ} + \text{व्युज्या अ} - 1}{\text{कोस्प अ} - \text{व्युज्या अ} + 1} = \sqrt{\frac{1 + \text{कोज्या अ}}{1 - \text{कोज्या अ}}}$

$$(६) \text{ कोस्प}^2 \text{ अ} + \text{कोस्प}^2 \text{ म} = \text{व्युज्ज्या}^2 \text{ अ} - \text{व्युज्ज्या}^2 \text{ म}$$

$$(७) \text{ व्युत्कोज्या}^2 \text{ अस्पअ} + २ \text{ व्युत्कोज्यां अ. व्युज्ज्या अ} \\ + \text{व्युज्ज्या}^2 \text{ म. कोस्प अ} = \text{व्युत्कोज्या}^2 \text{ अ} \times$$

$$\text{व्युज्ज्या}^2 \text{ अ} \quad [\text{वनारस १९४२}]$$

$$(८) \frac{\text{स्प}^2 \text{ अ} \cdot १ + \text{कोस्प}^2 \text{ म}}{१ + \text{स्प}^2 \text{ म} \cdot \text{कोस्प}^2 \text{ अ}} = \text{ज्या}^2 \text{ अ} \times$$

$$\text{व्युत्कोज्या}^2 \text{ म}$$

$$(९) \frac{१}{\text{व्युत्कोज्या अ} + \text{स्प अ}} - \frac{१}{\text{कोज्या म}}$$

$$= \frac{१}{\text{कोज्या अ}} - \frac{१}{\text{व्युत्कोज्या अ} - \text{स्प अ}}$$

$$(१०) \text{ व्युत्कोज्या अ} + \text{स्प अ} = \frac{१ + \text{ज्या अ} \cdot \text{कोज्या अ}}{\text{कोज्या अ}} = \frac{१ - \text{ज्या अ}}{१ - \text{ज्या अ}}$$

$$= \frac{१ + \text{कोज्या अ} + \text{ज्या अ}}{१ + \text{कोज्या अ} - \text{ज्या अ}}$$

$$[\text{नागपूर १९३९}]$$

$$(११) \frac{\text{कोस्प क} - \text{स्प ख}}{\text{कोस्प ख} - \text{स्प क}} = \text{कोस्प क स्प ख}$$

$$(१२) १ - \frac{\text{ज्या}^2 \text{ अ}}{१ + \text{कोस्प अ}} - \frac{\text{कोज्या}^2 \text{ म}}{१ + \text{स्प म}} = \text{ज्या अ कोज्या म}$$

$$[\text{वनारस १९४४}]$$

$$(१३) \frac{\text{कोज्या अ}}{१ - \text{स्प अ}} + \frac{\text{ज्या अ}}{१ - \text{कोस्प अ}} = \text{ज्या अ} + \text{कोज्या अ}$$

$$[\text{वनारस १९४५}]$$

$$(13) \quad ज्या^2 अ + ज्या^2 अ कोज्या^2 अ - ज्या^2 अ कोज्या^2 अ \\ - कोज्या^2 अ = ज्या^2 अ - कोज्या^2 अ$$

$$(14) \quad (कोस्प अ + व्युज्ज्या अ)^2 = \frac{1 + कोज्या अ}{1 - कोज्या अ}$$

$$(15) \quad २ स्प^२ अ = \frac{१}{व्युज्ज्या अ - १} - \frac{१}{व्युज्ज्या अ + १}$$

[नागपुर १९३९]

$$(16) \quad \frac{कोज्या अ}{१ - ज्या अ} + \frac{१ - ज्या अ}{कोज्या अ} = २ व्युत्कोज्या अ$$

$$(17) \quad \frac{२ व्युत्कोज्या अ स्प अ - स्प अ}{१ - व्युत्कोज्या अ + व्युत्कोज्या^२ अ + स्प^२ अ} = ज्या अ$$

$$(18) \quad (स्प क + व्युज्ज्या ख)^2 - (कोस्प ख - व्युत्कोज्या क)^2 \\ = २ स्प क कोस्प ख (व्युज्ज्या क + व्युत्कोज्या ख)$$

$$(19) \quad \text{यदि } स्प अ + ज्या अ = म \text{ और } स्प अ - ज्या अ = न \\ \text{तो सिद्ध करो कि } म^२ - न^२ = ४ \sqrt{मन}$$

[बनारस १९३९]

$$(20) \quad ज्या अ के पदों में (in terms of) व्यक्त करो:—$$

$$(व्युत्कोज्या अ - कोज्या अ) \sqrt{\frac{१ - ज्या अ}{१ + ज्या अ}}$$

(२२) व्युत्कोज्या अ के पदों में व्यक्त करो :—

$$\text{कोज्या अ} + \frac{\text{स्पअ कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}} + \frac{\text{ज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2\text{अ}}$$

[यनारस १८९९]

२७ यदि किसी कोण की कोई भी एक त्रिकोणमितीय निष्पत्ति दी गई हो तो उसकी अन्य निष्पत्तियां भी जानी जा सकती हैं।

उदाहरण १— किसी कोण की सव त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को उसकी कोटिज्या के पदों में व्यक्त करो।

मान लो कि कोज्या अ = क्ष

$$\text{तो ज्या अ} = \sqrt{1 - \text{कोज्या}^2\text{अ}}$$

$$= \sqrt{1 - \text{क्ष}^2}$$

$$\text{व्युज्या अ} = \frac{1}{\text{ज्या अ}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \text{क्ष}^2}}$$

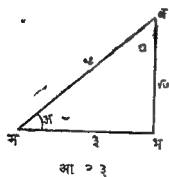
$$\text{व्युत्कोज्या अ} = \frac{1}{\text{कोज्या अ}}$$

$$= \frac{1}{\text{क्ष}}$$

$$\begin{aligned}\text{स्प अ} &= \frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}} \\ &= \frac{\sqrt{1 - \text{क्ष}^2}}{\text{क्ष}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{कोस्प अ} &= \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}} \\ &= \frac{\text{क्ष}}{\sqrt{1 - \text{क्ष}^2}}\end{aligned}$$

उदाहरण २— यदि कोस्प अ = $\frac{3}{\sqrt{13}}$ हो तो कोण अ की
अन्य त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों की संख्यात्मक अर्हापि
निश्चित करो ।



लंब कोण त्रिभुज यमभ में

$$\angle \text{भमव} = \text{अ},$$

$$\text{भव} = \sqrt{10}$$

$$\text{और मभ} = 3$$

$$\text{जिससे कोस्प अ} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\begin{aligned}\text{अब मय} &= \sqrt{\text{मभ}^2 + \text{भव}^2} \\ &= \sqrt{9 + 10} \\ &= 13\end{aligned}$$

$$\therefore \text{ज्या अ} = \frac{\text{भव}}{\text{मव}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{और व्युज्या अ} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \text{स्प अ} = \frac{1}{\text{कोस्प अ}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{कोज्या अ} = \frac{2}{4}$$

$$\text{और व्युत्कोज्या अ} = \frac{4}{2}$$

$$\text{उदाहरण ३— यदि व्युत्कोज्या अ - स्प अ} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

तो ज्या अ की अर्हा निश्चित करो ।

$$\begin{aligned} \text{व्युत्कोज्या अ - स्प अ} &= \frac{1 - \text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}} \\ &= \frac{1 - \text{ज्या अ}}{\sqrt{1 - \text{ज्या}^2 \text{अ}}} \\ &= \frac{\sqrt{1 - \text{ज्या अ}}}{\sqrt{1 + \text{ज्या अ}}} \end{aligned}$$

$$\text{अर्थात् } \sqrt{\frac{1 - \text{ज्या अ}}{1 + \text{ज्या अ}}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\therefore \frac{1 - \text{ज्या } \alpha}{1 + \text{ज्या } \alpha} = \frac{3}{5}$$

$$\text{अथवा } 4 \text{ ज्या } \alpha = 2$$

$$\therefore \text{ज्या } \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\text{उदाहरण ४— यदि कोस्य } \alpha = \frac{\text{क्ष}}{\text{य}}$$

तो $\frac{\text{क्ष कोज्या } \alpha - \text{य ज्या } \alpha}{\text{क्ष कोज्या } \alpha + \text{य ज्या } \alpha}$ की अर्था निकालो।

[अंश (numerator) और हर (denominator) को ज्या α से भाग देने पर]

$$\frac{\text{क्ष कोज्या } \alpha - \text{य ज्या } \alpha}{\text{क्ष कोज्या } \alpha + \text{य ज्या } \alpha} = \frac{\text{क्ष कोस्य } \alpha - \text{य}}{\text{क्ष कोस्य } \alpha + \text{य}}$$

$$= \frac{\text{क्ष} \cdot \frac{\text{क्ष}}{\text{य}} - \text{य}}{\text{क्ष} \cdot \frac{\text{क्ष}}{\text{य}} + \text{य}}$$

$$= \frac{\text{क्ष}^2 - \text{य}^2}{\text{क्ष}^2 + \text{य}^2}$$

प्रश्नावलि ३

- (१) किसी कोण की सय त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को उसकी ज्या के पदों में व्यक्त करो ।
- (२) किसी कोण की सय त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को उसकी स्पर्शज्या के पदों में व्यक्त करो ।
- (३) किसी कोण की सय त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को उसकी व्युत्क्रम कोटिज्या के पदों में व्यक्त करो ।
- (४) ज्या अ और कोज्या अ को कोस्प अ के पदों में व्यक्त करो ।
- (५) कोज्या अ और कोस्प अ को व्युज्ज्या अ के पदों में व्यक्त करो ।

(६) यदि किसी कोण की ज्या, $\frac{\sin(\alpha + 2\gamma)}{\sin^2 + 2\cos\gamma + 2\gamma}$ हो तो :

उस कोण की अन्य निष्पत्तियों की अर्हापि निश्चित करो
[कलकत्ता १८७९]

(७) यदि $2\text{व्युत्क्रमकोज्या अ} = \frac{य}{र} + \frac{र}{य}$ तो

(व्युज्ज्या अ + कोस्प अ) की अर्हा निश्चित करो ।

(८) यदि $\text{ज्याअ} = \frac{१}{\sqrt{५}}$ तो

$\frac{\text{कोस्प}^२\text{अ} - \text{स्प}^२\text{अ}}{\text{कोस्प}^२\text{अ} + \text{स्प}^२\text{अ}}$ की अर्हा निश्चित करो ।

(९) यदि $\text{स्प}^2\text{अ} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ तो सिद्ध करो कि :

$$\frac{\text{व्युज्ज्या}^2\text{अ} - \text{व्युत्कोज्या}^2\text{अ}}{\text{व्युज्ज्या}^2\text{अ} + \text{व्युत्कोज्या}^2\text{अ}} = \frac{1}{2}$$

(१०) यदि $\text{स्प}^2\text{अ} = 1 - \text{र}^2$ हो तो सिद्ध करो कि

$$\text{व्युत्कोज्या अ} + \text{स्प}^2\text{अ व्युज्ज्या अ} = (2 - \text{र}^2)^{\frac{3}{2}}$$

[यनारस १९८८]

प्रश्नावलि ३

- (१) किसी कोण की सब त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को उसकी ज्या के पदों में व्यक्त करो ।
- (२) किसी कोण की सब त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को उसकी स्पर्शज्या के पदों में व्यक्त करो ।
- (३) किसी कोण की सब त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को उसकी व्युत्क्रम कोटिज्या के पदों में व्यक्त करो ।
- (४) ज्या अ और कोज्या अ को कोस्प अ के पदों में व्यक्त करो ।
- (५) कोज्या अ और कोस्प अ को व्युज्ज्या अ के पदों में व्यक्त करो ।

(६) यदि किसी कोण की ज्या, $\frac{\sin(\alpha + 2\gamma)}{\sin^2 + 2\sin\alpha + 2\gamma}$ हो तो :

उस कोण की अन्य निष्पत्तियों की अर्थात् निश्चित करो
[कलकत्ता १८७९]

(७) यदि $2\text{व्युत्कोज्या अ} = \frac{य}{१} + \frac{१}{य}$ तो

(व्युज्ज्या अ + कोस्प अ) की अर्थात् निश्चित करो ।

(८) यदि $\text{ज्याअ} = \frac{१}{\sqrt{५}}$ तो

$\frac{\text{कोस्प}^२\text{अ} - \text{स्प}^२\text{अ}}{\text{कोस्प}^२\text{अ} + \text{स्प}^२\text{अ}}$ की अर्थात् निश्चित करो ।

$$\text{कोज्या } (90^\circ - \alpha) = \frac{\text{भव}}{\text{मव}} = \text{ज्या } \alpha.$$

$$\text{रूप } (90^\circ - \alpha) = \frac{\text{मम}}{\text{मव}} = \text{कोरूप } \alpha.$$

इसी प्रकार निम्नलिखित सम्बन्ध भी सिद्ध किए जा सकते हैं :

$$\text{व्युज्या } (90^\circ - \alpha) = \text{व्युत्कोज्या } \alpha$$

$$\text{व्युत्कोज्या } (90^\circ - \alpha) = \text{व्युज्या } \alpha$$

$$\text{और कोरूप } (90^\circ - \alpha) = \text{रूप } \alpha$$

अब, अधिक प्रयोग में आने वाले कुछ प्रमाण कोणों की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों का निश्चय किया जायगा।

३.२ 0° की निष्पत्तियाँ.



आ. ३.२

मान लो कि एक छोटा सा कोण यमय, निश्चित मापाम (fixed length) की सदिश त्रिज्या मय से अनुरूपित किया गया है।

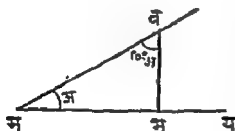
मय पर बम लंब खींचो।

$$\text{तो ज्या ममव} = \frac{\text{भव}}{\text{मव}}$$

तीसरा अध्याय

कुछ प्रमाण (standard) कोणों की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियां

३.१ लम्बपूरक (complementary) कोणों की
निष्पत्तियां—



आ. ३.१

मानलो कि यमय एक
न्यूनकोण है। रेखा
मय के किसी बिन्दु
य से रेखा मय पर
यम लम्ब खींचो।
लम्बकोण त्रिभुज
मयम से कोण मयम
कोण यमम का लम्ब-

पूरक होगा।

यदि $\angle यमम = अ$ हो, तो

$\angle मयम = ९०^\circ - अ$, होगा।

आकृति से, ज्या $(९०^\circ - अ) = \frac{मम}{मय} =$ कोज्या अ

अब किसी परिमित (finite) राशि का हर कोई अत्यन्त छोटी (infinitely small) राशि हो तो लब्धि = एक अनन्त राशि ।

इस प्रकार की अतिमहान् राशि ∞ चिह्न से दर्शाई जाती है ।

$$\therefore \text{व्युज्ज्या } 0^\circ = \infty$$

$$\text{पुनः व्युत्कोज्या } 0^\circ = \frac{1}{\text{कोज्या } 0^\circ}$$

$$= \frac{1}{1}$$

$$= 1$$

$$\text{और कोरूप } 0^\circ = \frac{1}{\text{रूप } 0^\circ}$$

$$= \frac{1}{0}$$

$$= \infty$$

३.२१ ९०° अथवा $\frac{\pi}{2}$ की निष्पत्तियां

कोण 0° और ९०° लम्बपूरक हैं । .

अतः अनुच्छेद ३.१ और ३.२ से,

$$\text{ज्या } ९०^\circ = \text{कोज्या } 0^\circ$$

$$= 1$$

$$\text{कोज्या } ९०^\circ = \text{ज्या } 0^\circ$$

अब यदि कोण भमय का धीरे धीरे इतना हास होजाय कि मय और मभ एक दूसरे से सम्पाती हो जाय तो कोण भमय शून्य सम हो जाता है और इस दशा में भय = ०

$$\text{इसलिए, ज्या}^{\circ} = \frac{0}{\text{मय}} = 0$$

$$\text{कोज्या भमय} = \frac{\text{मभ}}{\text{मय}}$$

जब \angle भमय शून्य होता है तो मभ और मय संपाती होते हैं और बिंदु य का बिंदु भ पर संपतन होता है, इस दशा में मय = मभ

$$\therefore \text{कोज्या}^{\circ} = \frac{\text{मभ}}{\text{मभ}} = 1$$

$$\text{स्प}^{\circ} = \frac{\text{ज्या}^{\circ}}{\text{कोज्या}^{\circ}}$$

$$= \frac{0}{1}$$

$$= 0$$

$$\text{व्युज्या}^{\circ} = \frac{1}{\text{ज्या}^{\circ}}$$

$$= \frac{1}{0}$$

अब किसी परिमित (finite) राशि का हर कोई अत्यन्त छोटी (infinitely small) राशि हो तो लब्धि = एक अनंत राशि ।

इस प्रकार की अतिमहान् राशि ∞ चिह्न से दर्शाई जाती है ।

$$\therefore \text{व्युज्ज्या } 0^\circ = \infty$$

$$\begin{aligned} \text{पुनः व्युत्कोज्या } 0^\circ &= \frac{?}{\text{कोज्या } 0^\circ} \\ &= \frac{1}{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{और कोस्प } 0^\circ &= \frac{1}{\text{स्प } 0^\circ} \\ &= \frac{1}{0} \\ &= \infty \end{aligned}$$

३.२१ 90° अथवा $\frac{\pi}{2}$ की निष्पत्तियां

कोण 0° और 90° लम्बपूरक हैं । .

अतः अनुच्छेद ३.१ और ३.२ से,

$$\begin{aligned} \text{ज्या } 90^\circ &= \text{कोज्या } 0^\circ \\ &= 1 \\ \text{कोज्या } 90^\circ &= \text{ज्या } 0^\circ \end{aligned}$$

$$= 0$$

$$\text{स्प } 90^\circ = \frac{\text{ज्या } 90^\circ}{\text{कोज्या } 90^\circ}$$

$$= \frac{1}{0}$$

$$= \infty$$

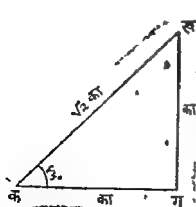
इसलिए, व्युज्या $90^\circ = 1$,

व्युत्कोज्या $90^\circ = \infty$,

कोस्प $90^\circ = 0$.

उदाहरण— रेखिकीय विधि से 90° के कोण की निष्पत्तियां निकालो।

३.३ कोण 45° अथवा $\frac{\pi}{4}$ की निष्पत्तियां—



आ ३.३

मान लो कि कखग एक लंब-कोण द्विस्तम त्रिभुज (rt. angled isosceles triangle) है ;

जिसमें $\angle ग = 90^\circ$

और $\angle क = \angle ख = 45^\circ$

मान लो, कग = खग = का

$$\text{तो कस} = \sqrt{\text{का}^2 + \text{का}^2}$$

$$= \sqrt{2} \text{ का}$$

$$\therefore \text{ज्या } 45^\circ = \frac{\text{खग}}{\text{कख}}$$

$$= \frac{\text{का}}{\sqrt{2} \text{ का}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{कोज्या } 45^\circ = \frac{\text{फग}}{\text{कख}}$$

$$= \frac{\text{का}}{\sqrt{2} \text{ का}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{रूप } 45^\circ = \frac{\text{ज्या } 45^\circ}{\text{कोज्या } 45^\circ}$$

$$= \frac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}}$$

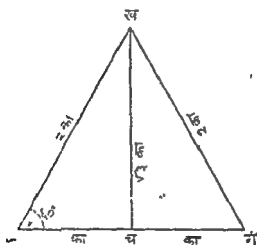
$$= 1$$

इसलिए, व्युत्ज्या $84^\circ = \sqrt{2}$,

व्युत्कोज्या $84^\circ = \sqrt{2}$,

और कोस $84^\circ = 1$

३.४ 60° अथवा $\frac{\pi}{3}$ की निम्नलिखितियां—



आ. ३.४

मान लो कखग एक समबिभुज (equilateral triangle) है,

इसलिए, $\angle क = \angle ख = \angle ग = 60^\circ$

ख शीर्ष से कग आधार पर खच लंब खींचो ।

मान लो समत्रिभुज की प्रत्येक भुजा की लम्बाई २का है।

तो कच = चय = का

लम्बकोण त्रिभुज कचख से,

$$\text{खच} = \sqrt{४ \text{ का}^2 - \text{का}^2} = \sqrt{३} \text{ का}$$

$$\therefore \text{ज्या } ६०^\circ = \frac{\text{खच}}{\text{कख}} = \frac{\sqrt{३} \text{ का}}{२ \text{ का}} = \frac{\sqrt{३}}{२}$$

$$\text{कोज्या } ६०^\circ = \frac{\text{कच}}{\text{कख}} = \frac{\text{का}}{२ \text{ का}} = \frac{१}{२}$$

$$\text{स्प } ६०^\circ = \frac{\text{ज्या } ६०^\circ}{\text{कोज्या } ६०^\circ} = \frac{\sqrt{३}/२}{१/२} = \sqrt{३}$$

$$\text{इसलिए, व्युज्या } ६०^\circ = \frac{२}{\sqrt{३}}$$

$$\text{व्युत्कोज्या } ६०^\circ = २,$$

$$\text{तथा कोस्प } ६०^\circ = \frac{१}{\sqrt{३}}$$

३.५ कोण ३०° अथवा $\frac{\pi}{६}$ की निष्पत्तियां —

कोण ३०° , कोण ६०° का लम्ब-पूरक है, अतः
अनुच्छेद ३.१ और ३.४ से,

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

इसलिए $\csc 30^\circ = 2$,

$$\sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\text{और } \cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

उदाहरण— अनुच्छेद ३४ की आवृत्ति से 30° के कोण की निष्पत्तियाँ निकालो।

३६ प्रमाण कोणों 0° , 30° , 45° , 60° और 90° की निष्पत्तियों की आवश्यकता होती है। ये यहाँ निम्नलिखित सारणी (table) के रूप में दी गई हैं। शिष्यार्थियों को चाहिए कि इसे कटस्थ कर लें।

कोण	0°	30°	45°	60°	90°
ज्या	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
कोटिज्या	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
स्तम्भज्या	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
सुत्रमज्या	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
सुक्रम- कोटिज्या	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
कोटिस्त- म्भज्या	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

३.६१ उदाहरण १— सत्यापन (verify) करो कि

$$\text{ज्या } 60^\circ = \frac{2 \text{ स्त } 30^\circ}{1 + \text{स्त } 30^\circ}$$

$$\text{दक्षिण पक्ष} = \frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \text{ज्या } 60^\circ = \text{याम पक्ष}$$

उदाहरण २— सिद्ध करो किं

$$(\text{कोज्या } 30^\circ + \text{स्प } 60^\circ)^2 + (\text{ज्या } 45^\circ + \sqrt{2} \text{ कोज्या } 60^\circ)^2 + (\text{कोस्प } 60^\circ - \text{कोज्या } 30^\circ)^2 = \frac{49}{6}$$

$$\begin{aligned} \text{याम पक्ष} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \times \frac{1}{2} \right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^2$$

$$= \frac{20}{4} + \frac{4}{2} + \frac{1}{12}$$

$$= \frac{61 + 24 + 1}{12}$$

$$= \frac{86}{12}$$

$$= \frac{43}{6}$$

प्रश्नावलि ४

(१) सत्यापन करो कि

$$(अ) \text{ ज्या } 60^\circ = 2 \text{ ज्या } 30^\circ \text{ कोज्या } 30^\circ$$

$$\begin{aligned} (आ) \text{ कोज्या } 90^\circ &= \text{कोज्या}^2 45^\circ - \text{ज्या}^2 45^\circ \\ &= 2 \text{ कोज्या}^2 45^\circ - 1 \\ &= 1 - 2 \text{ ज्या}^2 45^\circ \end{aligned}$$

$$(इ) \text{ ज्या } 30^\circ = \sqrt{\frac{1 - \text{कोज्या } 60^\circ}{2}}$$

$$(ई) \text{ कोज्या } 30^\circ = \sqrt{\frac{1 + \text{कोज्या } 60^\circ}{2}}$$

* (२) सत्यापन करो कि

$$(अ) \text{ ज्या } 135^\circ = 3 \text{ ज्या } 45^\circ - 4 \text{ ज्या}^3 45^\circ$$

$$(आ) \text{ कोज्या } 135^\circ = 4 \text{ कोज्या}^3 45^\circ - 3 \text{ कोज्या } 45^\circ$$

$$(इ) \text{ स्प } 120^\circ = \frac{4 \text{ स्प } 30^\circ - 4 \text{ स्प}^3 30^\circ}{1 - 6 \text{ स्प}^2 30^\circ + \text{स्प}^4 30^\circ}$$

$$(ई) \text{ कोज्या } 120^\circ = -\frac{1 - \text{स्प}^2 60^\circ}{1 + \text{स्प}^2 60^\circ}$$

टिप्पणी— विद्यार्थियों को चाहिए कि पाँचवें अध्याय को पढ़ लेने के पश्चात् दूसरे उदाहरण को करें।

(३) सिद्ध करो कि

$$(\text{ज्युको-या}^{\circ 45} + \text{ज्यु-या}^{\circ 60} + \text{कोस्प}^{\circ 30})$$

$$= 8 (\text{को-या}^{\circ 45} + \text{ज्यु-या}^{\circ 60} + \text{स्प}^{\circ 30}) = 6 \frac{1}{3}$$

(४) सिद्ध करो कि

$$\text{ज्युको-या } 30^{\circ} \text{ हर } 60^{\circ} + \text{ज्यु-या } 45^{\circ} \text{ ज्यु-या } 45^{\circ}$$

$$+ \text{को-या } 30^{\circ} \text{ कोस्प } 60^{\circ} = \frac{13}{2}$$

२७ सीमा (limit) की कल्पना—

मान लो $\frac{क}{य}$ एक भिन्न (fraction) है जिसमें अंश क की जहाँ स्थिर है और हर य की जहाँ विचरणशील (variable, or capable of variation) है।

$$\text{उदाहरणार्थ, } \frac{क}{१.१} = १०क,$$

$$\frac{क}{१.१११} = १०००क \text{ इत्यादि।}$$

स्पष्ट है कि जैसे-जैसे हर य की जहाँ कम होती जाती

ह, वैसे वैसे भिन्न $\frac{क}{य}$ की जहाँ बढ़ती जाती है। हर य

की अर्हा पर्याप्त कम करने पर, भिन्न $\frac{K}{y}$ की अर्हा इच्छानुसार

घटाई जा सकती है।

अर्थात्, जैसे-जैसे y की अर्हा शून्य की ओर पहुँचती है, वैसे-वैसे भिन्न $\frac{K}{y}$ की अर्हा अनन्त की ओर प्रवृत्त होती है (tends towards infinity)।

जब न्यून होते-होते y शून्यसम हो जाता है तो

$\frac{K}{y}$ की अर्हा की सीमा अनन्त होती है।

अथवा संक्षेप में,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{K}{y} \right) = \infty$$

पुनः, यदि राशि y संतत (continuously) बढ़ती जाय और अन्त में अनन्त हो जाय तो भिन्न $\frac{K}{y}$ की अर्हा अत्यंत छोटी (infinitesimally small) हो जाती है।

$$\text{अर्थात् } \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{K}{y} \right) = 0$$

$$= \frac{a}{2r}$$

∴ शकल कमल का क्षेत्रफल

$$= \frac{a}{2r} \text{ (वृत्त का क्षेत्रफल)}$$

$$= \frac{a}{2r} \times \pi r^2$$

$$= \frac{1}{2} a \pi r$$

३.१ यदि $0 < a < \frac{r}{2}$, जहाँ a भारीय माप में

है तो ज्या $a < a < \text{स्प } a$ ।

मान लो m केन्द्र और n त्रिज्या वाले वृत्त का कमल एक शकल है, और $\angle \text{कमल} = a$

मक, मल और कल को मिलाओ। बिंदु n पर वृत्त की स्पर्श-रेखा खस खींचो जो वर्धित (produced) रेखा मक से बिंदु s पर मिले तो, \triangle कमल का क्षेत्रफल,

$$= \frac{1}{2} \text{ मक. (ख से मक पर लंब)}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ मक. मल ज्या } a$$

$$\left(\therefore \frac{\text{खस}}{\text{मख}} = \frac{\text{खस}}{\text{अ}} = \text{स्पअ} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \text{ अ}^2 \text{ स्पअ}$$

आकृति से यह स्पष्ट है कि Δ कमख पूर्ण रूप से, शकल कमख के अन्तर्गत है और शकल कमख पूर्ण रूप से, Δ खमस के अन्तर्गत है।

इसलिए, Δ कमख $<$ शकल कमख $<$ Δ मखस

$$\text{अर्थात् } \frac{1}{2} \text{ अ}^2 \text{ ज्या अ} < \frac{1}{2} \text{ अ}^2 \text{ अ} < \frac{1}{2} \text{ अ}^2 \text{ स्पअ}$$

अथवा आदि से अन्ततक $\frac{1}{2} \text{ अ}^2$ से भाग देने पर

$$\text{ज्या अ} < \text{अ} < \text{स्पअ}$$

३.९१ यदि अ शून्य की ओर प्रवृत्त हो तो

$\frac{\text{ज्या अ}}{\text{अ}}$ और $\frac{\text{स्पअ}}{\text{अ}}$ दोनों राशिया सीमा में १ के सम होती हैं।

पिछले अनुच्छेद से,

$$\text{ज्या अ} < \text{अ} < \text{स्पअ} \dots\dots\dots (१)$$

आदिसे अततक ज्याअ से भाग देने पर,

$$१ < \frac{\text{अ}}{\text{ज्या अ}} < \frac{१}{\text{कोज्या अ}}$$

$$\text{अथवा, } 1 < \frac{a}{\text{र्या } a} < \text{व्युत्कोज्या } a \quad (2)$$

जब a की अर्धा अत्यंत छोटी हो जाती है तब व्युत्कोज्या a की अर्धा 1 हो जाती है।

इसलिए, सम्यन्ध (2) से, $\frac{\text{र्या } a}{a}$ की सीमा 1 है।

इसी प्रकार (1) को आदिमे अन्ततक स्प a से भाग देने पर,

$$\text{कोर्या } a < \frac{a}{\text{स्प } a} < 1 \dots \dots (3)$$

परन्तु जब a की अर्धा अत्यंत छोटी हो जाती है तब कोर्या a की अर्धा 1 हो जाती है।

इसलिए सम्यन्ध (3) से $\frac{a}{\text{स्प } a}$ अथवा $\frac{\text{स्प } a}{a}$ की सीमा 1 होती है।

ये फल (result) प्रायः इस रूप में लिखे जाते हैं।

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{\text{र्या } a}{a} \right) = 1,$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{\text{स्प } a}{a} \right) = 1$$

३.९२ उदाहरण १— यदि किसी कोण का भारीय माप θ हो तो दिखाओ कि

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \left[\sec \left(\frac{\theta}{s} \right) \right] = \theta$$

$$\text{अथ } \sec \left(\frac{\theta}{s} \right) = \frac{\sec \left(\frac{\theta}{s} \right)}{\left(\frac{\theta}{s} \right)}$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow \infty} \left[\sec \left(\frac{\theta}{s} \right) \right] = \theta \cdot \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\sec \left(\frac{\theta}{s} \right)}{\left(\frac{\theta}{s} \right)}$$

$$= \theta \cdot \lim_{\left(\frac{\theta}{s} \right) \rightarrow 0} \frac{\sec \left(\frac{\theta}{s} \right)}{\left(\frac{\theta}{s} \right)}$$

$$= \theta \cdot 1 = \theta$$

उदाहरण २— ज्या 30° की एक उपसन्न (approximate) अर्हा निर्दिष्ट करो।

$$30' = \left(\frac{1}{2} \right) = \left(\frac{\text{ज्या}}{180 \times 2} \right)^{\text{भा}}$$

$$\therefore \text{ज्या } 30' = \text{ज्या} \left(\frac{\text{ज्या}}{360} \right)$$

$$= \frac{\text{ज्या}}{360} \text{ लगभग}$$

$$= \frac{3.14159}{360}$$

$$= .0087266 \text{ लगभग}$$

प्रटनात्रलि ६

इन कोणों की उपसन्न अर्द्धांश निकालो—

- (१) कोज्या $30'$ (२) ज्या $20'$
 (३) व्युज्या $10''$ (४) व्युत्कोज्या $1'$
 (५) कोन्य $49''$

नीचे दिए समीकरणों का स्थूल रूप से साधन करो ।

(६) $\sin x = .01$ (७) ज्या $x = .002$

(८) यदि x आरीय माप में हो तो सिद्ध करो कि,

$$\text{सी}\left[\frac{\text{स-स्प}\left(\frac{x}{\text{स}}\right)}{\text{स}}\right] = x$$

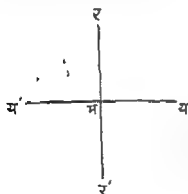
- (९) किसी बिन्दु से १ कोशक (mile) की दूरी पर स्थित ६ पाद ऊँचे बाँस द्वारा दत्त बिन्दु पर आपातित कोण का निदन्वय करो।
- (१०) यदि किसी बिन्दु से ८८० यार्ड (yards) की दूरी पर स्थित एक बाँस दत्त बिन्दु पर २०' का कोण आपातित करना हो, तो बाँस की ऊँचाई क्या है?

चौथा अध्याय

त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों के विचरण (variations)

४.१ धन और ऋण रेखाएँ—

पहले अध्याय में यह बतलाया जा चुका है कि कोण किस प्रकार धन अथवा ऋण हो सकते हैं। अब यह देखा जायगा कि एक समतल में रेखाओं की दिशा किस प्रकार धन अथवा ऋण हो सकती है।



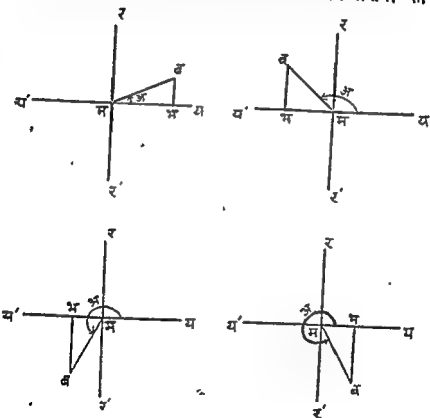
आ. ४.१

मान लो कि यमय' और रमर' दो परस्पर लंब सरल रेखाएँ एक दूसरे को म बिंदु पर काटती हैं।

तो रुद्धि के अनुसार रर' के दक्षिण पक्ष की ओर यय' की समान्तर सरल रेखाएँ धन, और रर' के वाम पक्ष की ओर यय' की समान्तर सरल रेखाएँ ऋण मानी जाती हैं।

इसी प्रकार $र'र$ की समान्तर और $यय'$ के ऊपर की सरल रेखाएं घन, और $रर'$ की समान्तर और $यय'$ के नीचे की सरल रेखाएं कण मानी जाती हैं।

४.२ किसी भी कोण की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियां—
दूसरे अध्याय में न्यूनकोण की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों की



आ. ४.१

परिभाषा दी गई है। अब किसी भी कोण की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों की परिभाषा दी जायगी।

मान लो कि परस्पर लंब रेखाएं $यय'$, $रर'$ एक दूसरे का = बिंदु पर छेदन करती हैं। इस प्रकार पत्र का सम्पूर्ण समतल चार चरणों में विभाजित हो जाता है।

मान लो निदिचत आयाम की सदिश त्रिज्या मय, स्थिति मय से प्रतिघटोच्चत् परिभ्रमण आरम्भ कर, धन कोण यमय ($=\theta$) का अनुरेखण करती है। जैसा कि आकृतियों में प्रदर्शित किया गया है रेखा मय, चार चरणों में से किसी भी चरण में हो सकती है। व बिंदु से रेखा $यय'$ पर यम लम्ब। योंचो। कोण θ की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियां ये होंगी—

$$\text{ज्या } \theta = \frac{\text{मय}}{\text{मय}}, \quad \text{व्युज्याम} = \frac{\text{मय}}{\text{मय}}$$

$$\text{कोज्या } \theta = \frac{\text{मम}}{\text{मय}}, \quad \text{व्युकोज्या } \theta = \frac{\text{मय}}{\text{मम}}$$

$$\text{स्प } \theta = \frac{\text{मय}}{\text{मम}}, \quad \text{कोस्प } \theta = \frac{\text{मम}}{\text{मय}}$$

ऊपर दी हुई परिभाषाओं में रेखाओं के चिह्नों पर उचित ध्यान देने की आवश्यकता है। सदिश त्रिज्या सदा धन मानी जाती है।

४-२१ कोण यमय ($=\theta$) की अर्हा चाहे कुछ भी हो, अनुच्छेद २-५ की भांति, यहां भी यह दिखाया जा सकता है कि,

$$\text{ज्या}^2 \alpha + \text{कोज्या}^2 \alpha = 1$$

$$\text{व्युत्कोज्या}^2 \alpha = 1 + \text{स्प}^2 \alpha$$

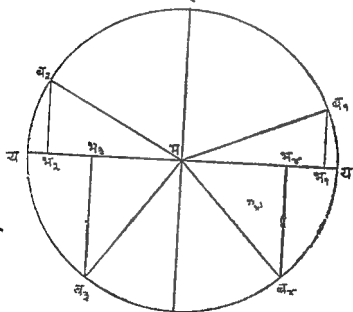
$$\text{व्युज्ज्या}^2 \alpha = 1 + \text{कोस्प}^2 \alpha$$

$$\text{स्प } \alpha = \frac{\text{ज्या } \alpha}{\text{कोज्या } \alpha}$$

$$\text{और व कोस्प } \alpha = \frac{\text{कोज्या } \alpha}{\text{ज्या } \alpha}$$

४३ त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों के चिह्न-

र



र'
आ. ४२

म बिंदु को केन्द्र मानकर किसी निश्चित त्रिज्या का एक वृत्त खींचो। व्यास यय' और रर' वृत्त को चार चरणों में विभाजित करते हैं। मान लो कि मव_१, मव_२, मव_३, और मव_४ चार चरणों में सदिश त्रिज्या की स्थितियां हैं। य,भ_१, य,भ_२, य,भ_३, और य,भ_४ रेखा यय' पर लम्ब खींचो।

प्रथम चरण यमर में म,य, और मभ, दोनों रेखाएं धन हैं; अतः इस चरण के किसी कोण की सय त्रिकोणमितीय निष्पात्तियां धन होंगी।

द्वितीय चरण य'मर में म,य, धन है परन्तु मभ, ऋण है। इसलिए ज्या \angle य,मभ_१, म,य, और मय_१, दो धन राशियों की निष्पात्ति होने के कारण धन है; परन्तु कोटिज्या \angle य,मभ_२, ऋण राशि मभ_२ और धन राशि मय_२ की निष्पात्ति होने के कारण ऋण है। इसी प्रकार स्पर्शज्या \angle य,मभ_३, भी धन राशि भ,य, और ऋण राशि मभ_३ की निष्पात्ति होने के कारण ऋण है।

तृतीय चरण य'मर' में म,य_३ और मभ_३ दोनों रेखाएं ऋण हैं; अतः ज्या \angle य,मभ_३ और कोटिज्या \angle य_३मभ_३ ऋण हैं परन्तु स्पर्शज्या \angle य,मभ_४ धन है।

चतुर्थ चरण र'मय में म,य_४ ऋण और मभ_४ धन है; अतः ज्या \angle य,मभ_४ ऋण, कोटिज्या \angle य,मभ_४ धन और स्पर्शज्या \angle य,मभ_४ ऋण हैं।

क्योंकि किसी कोण की व्युत्क्रमज्या, उस कोण की ज्या का व्युत्क्रम है अतः किसी भी चरण में कोण की व्युत्क्रमज्या का चिह्न उस कोण की ज्या के चिह्न के समान होगा। इसी प्रकार किसी भी चरण में कोण की व्युत्क्रमकोटिज्या

और कोटिज्या के चिह्न तथा स्पर्शज्या और कोटिस्पर्शज्या के चिह्न सदा एक होते हैं। इसलिए यदि किसी कोण की तीन मुख्य त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों के चिह्न ज्ञात हों तो उसकी शेष निष्पत्तियों के चिह्न भी ज्ञात किए जा सकते हैं।

अतः यह सारणी स्मरण रखनी चाहिए—

		र	
	ज्या + कोज्या - स्प -		ज्या + कोज्या + स्प +
य		म	य
	ज्या - कोज्या - स्प +		ज्या - कोज्या + स्प -
		र'	

४.४ अथ, कोण अ का शून्य से २ व्या तक संतत विचरण होने पर, ज्या अ की अर्धा के विचरणों का अनुरेखण किया जायगा।

मान लो पिछले अनुच्छेद की आकृति में वृत्त की त्रिज्या अ है।

प्रथम चरणः— ज्या अ = $\frac{म, य,}{अ}$

जैसे-जैसे कोण अ शून्य से $\frac{२५}{२}$ तक बढ़ता है, वैसे-वैसे म, य,

पहुँचती है और उसके द्वारा अनुरेखित कोण α २ व्या के सम होता है। इस परिभ्रमण के आरम्भ से अन्त तक, कोण α की ज्या की अर्द्धांशों के परिवर्तनों पर गतानुच्छेद में विचार किया गया है। अब यदि सदिश त्रिज्या पुनः एक पूर्ण प्रतिघटीवत् परिभ्रमण करे तो कोण α की अर्द्धांश २ व्या से ४ व्या तक बढ़ जाती है और प्रथम परिभ्रमण में ज्या α की अर्द्धांशों में जो परिवर्तन हुए थे उनका उसी क्रम (order) में पुनरावर्तन होता है। इसके अतिरिक्त यदि किन्हीं भी दो कोणों का अन्तर ४ लंब कोण अथवा २ व्या आर हो, तो उन कोणों के लिए सदिश त्रिज्या की स्थिति एक ही होती है; अतः उन कोणों की ज्या भी एक ही होती है। इसलिए यह स्पष्ट है कि ज्या एक आवर्तीय श्रित है और उसका आवर्त-काल (period) २ व्या है। इसी प्रकार सब त्रिकोणमितीय निष्पत्तियाँ आवर्तीय श्रित हैं और स्पर्शज्या और कोटिस्पर्शज्या के अतिरिक्त सब का आवर्त काल २ व्या है।

स्पर्शज्या और कोटिस्पर्शज्या की अर्द्धांशों में, परिभ्रमण-रेखा के प्रत्येक अर्ध परिभ्रमण के पश्चात् पुनरावर्तन होता है। अतः स्पर्शज्या और कोटिस्पर्शज्या का आवर्त-काल व्या है।

४.६ ज्या-विंदुरेख (sine graph) अथवा समीकार $y = \sin x$ का विंदुरेख

मान लो कि परस्पर लंब सरल रेखाएं मय और मर विंदु म पर मिथश्छेदन करती हैं। रेखा मय पर y और रेखा मर पर ज्या y की संघादी अर्द्धांशों का मापन करो। y की कुछ उपयुक्त अर्द्धांश उदाहरणार्थ $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$, इत्यादि लेकर ज्या

संतत शून्य से π तक बढ़ता है । अतः ज्या x की अर्धा संतत ० से १ तक बढ़ती है ।

द्वितीय चरणः— ज्या $x = \frac{m_1 y_1}{\pi}$

जैसे-जैसे कोण x , $\frac{\pi y_1}{2}$ से π तक बढ़ता है वैसे-वैसे $m_1 y_1$

संतत π से शून्य तक घटता है । अतः ज्या x की अर्धा संतत १ से शून्य तक घटती है ।

तृतीय चरणः— ज्या $x = \frac{m_2 y_2}{\pi}$

जैसे-जैसे कोण x , π से $\frac{3\pi y_2}{2}$ तक बढ़ता है, वैसे-वैसे $m_2 y_2$

संतत शून्य से $-\pi$ तक घटता है । अतः ज्या x की अर्धा संतत शून्य से -1 तक घटती है ।

चतुर्थ चरणः— ज्या $x = \frac{m_3 y_3}{\pi}$

जैसे-जैसे कोण x , $\frac{3\pi y_3}{2}$ से 2π तक बढ़ता है, वैसे-वैसे

$m_3 y_3$ संतत $-\pi$ से शून्य तक बढ़ता है । अतः ज्या x की अर्धा संतत -1 से शून्य तक बढ़ती है ।

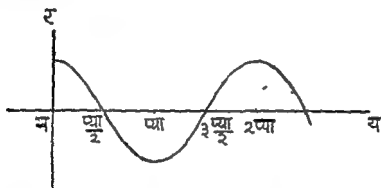
४.५ आवर्तीय श्रित (periodic functions)—

स्थिति मय से आरम्भ कर एक पूर्ण प्रतिघटीवत् परिभ्रमण करने के पश्चात् सदिश त्रिज्या पुनः स्थिति मय पर आ

यह वक्र ज्या-विन्दुरेख अथवा समीकार $r = \text{ज्या } \theta$ का विन्दुरेख कहलाता है।

य और ज्या θ की उपयुक्त अर्धायि लेने से इस वक्र को मय के कण पार्श्व (side) पर भी बढ़ा सकते हैं।

४.७ इसी प्रकार, कोण θ के संतत, शून्य से 2π तक विचरण करने पर कोज्या θ की अर्धायि के विचरण का अनुरेखण करो और समीकार $r = \text{कोज्या } \theta$ का विन्दुरेख खींचो।



आ. ४.४

अपेक्षित विन्दु-रेख दी हुई आकृति के समान होगा।

४.८ अब कोण θ के शून्य से 2π तक संतत विचरण करने पर $\sec \theta$ की अर्धायि के विचरण का अनुरेखण

य की संवादी अर्द्धां निकालो ।

य	०	$\frac{\text{प्या}}{२}$	प्या	$\frac{३\text{प्या}}{२}$	२प्या	$\frac{५\text{प्या}}{२}$	३प्या
ज्या य	०	१	०	-१	०	१	०

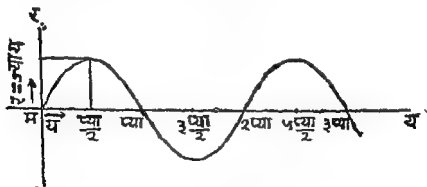
ये साथ में दी हुई सारणी में भी दी गई हैं ।

य के लिये $\frac{\text{प्या}}{२}$ बार = २ शतिमान

और २ अथवा ज्या अ के लिए १ = १ शतिमान

इस अनुमाप (scale) पर, य और ज्या य की संवादी अर्द्धां क निरूपण करने वाले बिन्दुओं का अंकन करो ।

यह देखा जायगा कि ये सब बिन्दु एक संतत (continuous) वक्र (curve) पर हैं ।



आ. ४.३

जैसे-जैसे कोण अ शून्य से $\frac{\text{प्या}}{2}$ तक संतत बढ़ता है
 म, य, संतत बढ़ता है और मम, संतत घटता है।

इसलिए $\frac{\text{म, य,}}{\text{मम,}}$ अर्थात् स्प अ संतत बढ़ता है।

जब अ = $\frac{\text{प्या}}{2}$, तो म, य, = अ और मम, = 0

$$\therefore \text{स्प } \frac{\text{प्या}}{2} = \infty$$

इसलिए प्रथम चरण में स्प अ शून्य से $+\infty$ तक संतत बढ़ता है।

द्वितीय चरण:— द्वितीय चरण में, कोण अ जैसे-जैसे $\frac{\text{प्या}}{2}$ से प्या तक बढ़ता है वैसे-वैसे म, य, अ से शून्य तक घटता है और मम, घटते हुए संख्यात्मक रूप से (numerically) शून्य से अ तक बढ़ता जाता है।

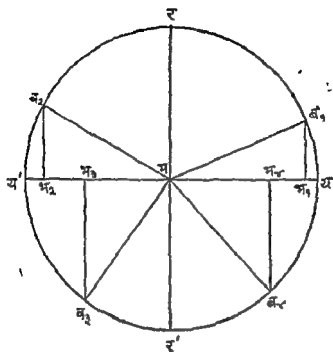
$$\text{अब स्प अ} = \frac{\text{म, य,}}{\text{मम,}}$$

$$\therefore \text{जब अ} = \frac{\text{प्या}}{2} + \text{उपेक्षणीय अल्प कोण}$$

$$\text{तब स्प अ} = \frac{-\text{अ}}{2} = -\infty$$

$$\text{और जब अ} = \text{प्या, स्प अ} = \frac{0}{-2} = 0$$

किया जायगा ।



आ. ४. ५

प्रथम चरण:— $\text{स्प अ} = \frac{\text{म, य,}}{\text{मम,}}$

जब $\text{अ} = 0$, तो $\text{म, य,} = 0$

और $\text{मम,} = 3$

$\therefore \text{स्प 0} = \frac{0}{3} = 0$

जैसे-जैसे कोण अ शून्य से $\frac{\pi}{2}$ तक संतत बढ़ता है
 भ, य, संतत बढ़ता है और मभ, संतत घटता है।

इसलिए $\frac{\text{भ, य,}}{\text{मभ,}}$ अर्थात् $\tan \theta$ संतत बढ़ता है।

जब $\theta = \frac{\pi}{2}$, तो भ, य, = प्र और मभ, = 0

$$\therefore \tan \theta = \infty$$

इसलिए प्रथम चरण में $\tan \theta$ अ शून्य से $+\infty$ तक संतत बढ़ता है।

द्वितीय चरण:— द्वितीय चरण में, कोण अ जैसे-जैसे $\frac{\pi}{2}$ से π तक बढ़ता है वैसे-वैसे भ, य, प्र से शून्य तक घटता है और मभ, ऋण रहते हुए संख्यात्मक रूप से (numerically) शून्य से प्र तक बढ़ता जाता है।

$$\text{अब } \tan \theta = \frac{\text{भ, य,}}{\text{मभ,}}$$

$$\therefore \text{ जब } \theta = \frac{\pi}{2} + \text{उपेक्षणीय अल्प कोण}$$

$$\text{तब } \tan \theta = \frac{-\text{प्र}}{0} = -\infty$$

$$\text{और जब } \theta = \pi, \tan \theta = \frac{0}{-\text{प्र}} = 0$$

इसलिए स्प अ बीजीय विधि से (algebraically) $-\infty$ से शून्य तक बढ़ता है।

अतः, अ के $\frac{प्या}{२}$ अर्धा प्राप्त करने क ठीक पूर्व ही स्प अ की अर्धा धन और बहुत बड़ी होती है, और अ के $\frac{प्या}{२}$ अर्धा प्राप्त करने के ठीक पश्चात् ही स्प अ की अर्धा ऋण और बहुत बड़ी होती है।

इसप्रकार जब अ की अर्धा प्रथम चरण से द्वितीय चरण में प्रवेश करती हुई, $\frac{प्या}{२}$ के सम होती है तब स्प अ की अर्धा में एक छण्ड (break) आ जाता है।

तृतीय चरणः— तृतीय चरण में म, य, और मम, दोनों ऋण होते हैं, म, य, संख्यात्मक रूप से शून्य से ऋ तक बढ़ता है। और मम, संख्यात्मक रूप से ऋ से शून्य तक घटता है।

इसलिए स्प अ = $\frac{म, य,}{मम,}$ धन रहते हुए शून्य से ∞ तक बढ़ता है।

चतुर्थ चरणः— चतुर्थ चरण में म, य, ऋण है और संख्यात्मक रूप से ऋ से शून्य तक घटता है, और मम, धन रहते हुए शून्य से ऋ तक बढ़ता है।

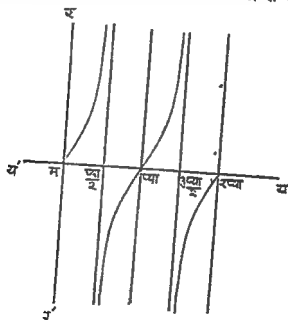
इसलिए स्प अ = $\frac{म, य,}{मम,}$ बीजीय विधि से $-\infty$ से शून्य तक बढ़ता है।

४.८१ स्पर्शज्या विन्दुरेख अथवा समीकार $r = \text{स्प } y$ का विन्दुरेख—

य	०	$\frac{\text{प्या}}{2} - ०$	$\frac{\text{प्या}}{2} + ०$	प्या	$\frac{३\text{प्या}}{2} - ०$	$\frac{३\text{प्या}}{2} + ०$	२प्या
स्प य	०	∞	$-\infty$	०	∞	$-\infty$	०

कोण य का शून्य से २ प्या तक विचरण होने पर, स्प य की संवादी अर्थात् सारणी में दी गई हैं।

सारणी से यह स्पष्ट है कि कोण य के प्या से २ प्या तक



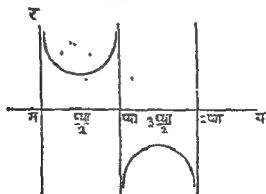
आ. ४.६

विचरण करने पर स्प य की जो अर्धायें प्राप्त होती हैं वे क्रमशः, कोण य के शून्य से π तक विचरण में, स्प य की अर्धायों के सम हैं। इससे यह ज्ञात होता है कि स्प य का आवर्तकाल π है।

कोण य की महत्ताएं मय रेखा पर, स्प य की घन अर्धायें मर पर और ऋण अर्धायें मर' पर निरूपित की गई हैं।

स्प य की अर्धायों का निरूपण करने वल विंदुओं को अंकन करो। उन विंदुओं को मिलाने वाला चक्र खींचने से समीकार $r = \text{स्प य का विंदुरेख}$ प्राप्त होता है। यह आकृति में दिखाया गया है। इसे य की २व्या से बड़ी (greater) अर्धायों के लिए और य की ऋण अर्धायों के लिए भी यड़ा सकते हैं।

४.९ व्युक्रमज्या-विंदुरेख (cosecant graph)



आ. ४.७.

कोण y के शून्य से २ प्या तक विचरण के लिये समी-
 धार $r = \text{व्युत्क्रोश्या } y$ का विंदुरेख आकृति में दर्शाया गया है ।

उदाहरण

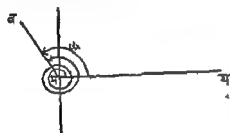
कोण x के शून्य से २ प्या तक विचरण करने पर,
 व्युत्क्रोश्या x और कोस्प x के विचरणों का अनुरेखण करो
 और

(१) $r = \text{व्युत्क्रोश्या } y$ और (२) $r = \text{कोस्प } y$ के
 विंदुरेख अनुरेखित करो ।

पांचवां अध्याय

किसी भी महत्ता के कोण की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियां

५.१ कोण (360° स \pm अ) अथवा (2 स \pm अ) की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को (जहां स शून्य, अथवा धन अथवा ऋण पूर्णांक हो) अ की निष्पत्तियों के पदों में व्यक्त करना।

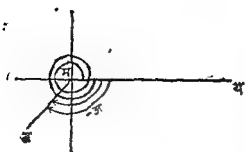


आ. ५.१

यह स्पष्ट है कि यदि दो कोणों का अन्तर 360° अथवा २ स \pm अ का पूर्ण अपवर्त्य (multiple) हो अर्थात् यदि यह अन्तर परिभ्रमण-रेखा के, धन अथवा ऋण दिशा में

एक अथवा अनेक पूर्ण परिभ्रमण से अनुरेखित किया जा सके तो दोनों कोणों के लिए परिभ्रमणरेखा की अंतिम स्थितियां संपाती होती हैं। इसलिए ऐसे दो कोणों की सब त्रिकोणमितीय निष्पत्तियां महत्ता में और साथ ही चिह्न में भी समान होती हैं।

इस प्रकार कोण (360° स $+$ अ) की निष्पत्तियां कोण अ की निष्पत्तियों के समान और कोण (360° स $-$ अ) की



आ. ५.२

निष्पत्तियां कोण
(-अ) की निष्पत्तियों
के समान होती हैं।

उपप्रेम्यः— 360°
और 0° की त्रिकोण-
मितीय निष्पत्तियां
एक सी होती हैं।

५.२ अ की अर्धा चाहे कुछ भी हो, कोण (-अ) की निष्पत्तियां कोण अ की निष्पत्तियों के पदों में व्यक्त करना।

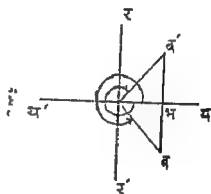
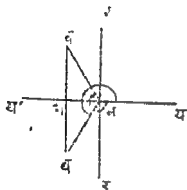
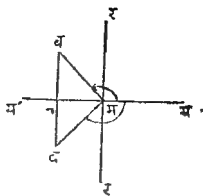
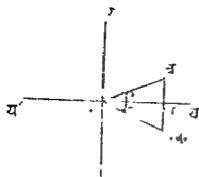
मान लो परिभ्रमणरेखा मय स्थिति से प्रारम्भ हो, महत्ता में अ के सम यमव कोण धन दिशा में और यमव' कोण ऋण दिशा में अनुरक्षित करती है।

अर्थात्, $\angle \text{यमव} = \text{अ}$

$\angle \text{यमव}' = -\text{अ}$

मय रेखा पर के किसी बिन्दु य से मय अथवा मय' पर यम लंब लींचो और यम को इस प्रकार बढ़ाओ कि यह मय' से बिन्दु य' पर मिले।

मय (और मय') की चार चरणों में से प्रत्येक में, स्थिति के अनुसार चार आकृतियां दी गई हैं।



आ. ५.३

लंब कोण त्रिभुजों वमम और व'भम में रेखा मय साधारण है

और $\angle भमव = \angle भमर'$

\therefore ये दोनों त्रिभुज सर्वांगसम (congruent) हैं।

अतः चारों आकृतियों में से प्रत्येक में, रेखाओं के चिह्नों का उचित ध्यान रखते हुए, $\text{भव}' = \text{भव}$ और $\text{भव}' = -\text{भव}$ परिभाषानुसार,

$$\text{ज्या}(-\alpha) = \frac{\text{भव}'}{\text{मव}'} = \frac{-\text{भव}}{\text{मव}} = -\text{ज्या } \alpha$$

$$\text{कोज्या}(-\alpha) = \frac{\text{मभ}}{\text{मव}'} = \frac{\text{मभ}}{\text{मव}} = \text{कोज्या } \alpha$$

$$\therefore \text{स्प}(-\alpha) = \frac{\text{ज्या}(-\alpha)}{\text{कोज्या}(-\alpha)} = \frac{-\text{ज्या } \alpha}{\text{कोज्या } \alpha} = -\text{स्प } \alpha$$

$$\text{और व्युज्ज्या}(-\alpha) = -\text{व्युज्ज्या } \alpha$$

$$\text{व्युत्कोज्या}(-\alpha) = \text{व्युत्कोज्या } \alpha$$

$$\text{कोस्प}(-\alpha) = -\text{कोस्प } \alpha$$

$$\text{उदाहरण— } \text{ज्या}(-45^\circ) = -\text{ज्या } 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{स्प}(360^\circ - 30^\circ) = \text{स्प}(-30^\circ) = -\text{स्प } 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\text{कोज्या}(-60^\circ) = \text{कोज्या } 60^\circ = \frac{1}{2}$$

५.३ श्रित की परिभाषा—

प्रत्येक पदसंहति (expression) चल (variable) और अचल राशियों से बनती है। चल राशि की भिन्न-भिन्न अर्थाओं के अनुसार पदसंहति की अर्था में भी परिवर्तन होता है। यदि किसी पद संहति में चल राशि य निहित हो तो उसकी अर्था य की अर्था पर निर्भर रहती है और इस पद-संहति को य का श्रित कहते हैं। इसे श्रि (य) इस प्रकार लिखते हैं।

यदि श्रि (य) में य के स्थान में -य लिखने से उसकी महत्ता और चिह्न में कोई परिवर्तन न हो तो उसे य का सम श्रित कहते हैं। यदि श्रि (य) सम श्रित हो, तो

$$\text{श्रि}(-य) = \text{श्रि}(य)$$

यदि श्रि (य) में य के स्थान में -य लिखने से उसकी महत्ता पहले के समान रहे परन्तु उसके चिह्न में परिवर्तन हो तो उस य का विषम (odd) श्रित कहते हैं।

यदि श्रि (य) विषम श्रित हो तो

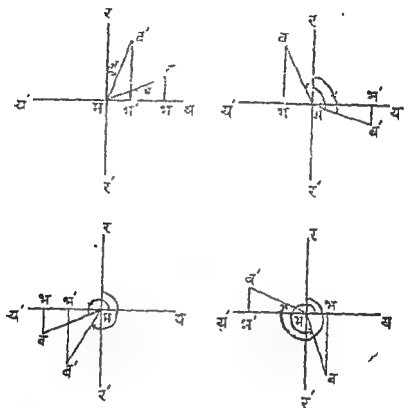
$$\text{श्रि}(-य) = -\text{श्रि}(य)$$

गतानुच्छेद से यह ज्ञात होगा कि कोज्या य और व्युत्कोज्या य, य के समश्रित हैं; तथा ज्या य, व्युज्या य, स्पष्ट और कोस्प य, य के विषम श्रित हैं।

५.३ अ की कोई भी अर्था होने पर कोण $(९०^{\circ} - अ)$

अथवा $\left(\frac{\pi}{२} - अ\right)$ की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को

कोण अ की निष्पत्तियों के पदों में व्यक्त करना।



आ. ५. ४

मान लो एक परिभ्रमण रेखा OM , O के सम $\angle ymv$ का अनुरेखण करती है और एक दूसरी परिभ्रमण रेखा OM' ,

स्थिति मय से प्रारम्भ हो $\angle यमर = 90^\circ$ प्रतिघटीयत् अनु
रेखित करती है और इसके पश्चात् विरुद्ध दिशा में घूमकर
 $\angle रमय' = \alpha$ गतीयत् अनुरेखित करती है। इस प्रकार
 $\angle यमय' = 90^\circ - \alpha$

मय और मय पर प्रमश 'र ओर र' म स समान दूरी
पर हो और मय अथवा मय पर लय यम और य म' लीं चो।

$\angle यमय$ और $\angle रमय'$ की महत्ताएँ समान होने के
कारण,

$$\angle भमय = \angle मय'म$$

और, मय = मय'

दोनों लय कोण त्रिभुज यमभ और मयभ सर्वांग
सम हैं।

दोनों त्रिभुजों की सहायी भुजाएँ सम आयाम की
हैं। चिह्नों का ध्यान रखते हुए, आरतियों से,

$$\text{भय} - \text{मभ}, \text{मय} = \text{भय}, \text{मय}' = \text{मय}$$

इसलिए परिभाषानुसार,

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \cos \angle यमय' = \frac{\text{भय}'}{\text{मय}} = \frac{\text{मभ}}{\text{मय}} = \cos \alpha$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \sin \angle यमय' = \frac{\text{मय}'}{\text{मय}} = \frac{\text{मय}}{\text{मय}} = \sin \alpha$$

$$\sec(90^\circ - \alpha) = \frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha$$

इसी प्रकार व्युज्या $(90^\circ - \alpha) = \text{व्युत्कोज्या } \alpha,$

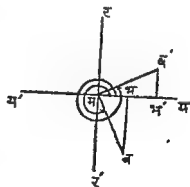
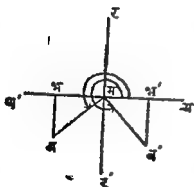
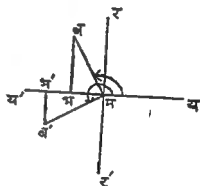
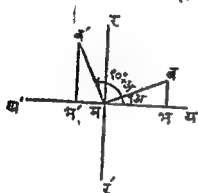
व्युत्कोज्या $(90^\circ - \alpha) = \text{व्युज्या } \alpha,$

कोस्प $(90^\circ - \alpha) = \text{स्प } \alpha$

५.५ α की कोर्ड भी अर्धा होनेपर कोण $(90^\circ + \alpha)$

अथवा $\left(\frac{\text{प्या}}{2} + \alpha\right)$ की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को कोण

α की निष्पत्तियों के पदों में निश्चय करना।



आ. ५५

मान लो परिभ्रमण-रेखा मय, मय स्थिति से प्रारम्भ कर
 थ के सम धन कोण यमय का अनुरेखण करती है और
 तत्पश्चात् उसी दिशा में अर्थात् प्रतिघटीवत् घूमती हुई एक
 और लंब कोण बनाती है और इस प्रकार स्थिति मय' पर आ
 पहुंचती है तो $\angle \text{यमय} = 90^\circ + \alpha$

मय और मय' सम आयाम के लो और विन्दु य और य'
 से मय पर लंब वम और य'म' खींचो ।

त्रिभुज मभव और मम य' सर्वांगसम हैं । अतः उनकी
 संघादी भुजाएं समान हैं । अतः चारों आकृतियों का ध्यान
 रखते हुए,

मय' = मय, म'य' = मम, और मम' = -मय .

$$\therefore \text{ज्या } (90^\circ + \alpha) = \frac{\text{म'य}'}{\text{मय}'} = \frac{\text{मम}}{\text{मय}} = \text{कोज्या } \alpha$$

$$\text{कोज्या } (90^\circ + \alpha) = \frac{\text{मम}'}{\text{मय}'} = \frac{-\text{मय}}{\text{मय}} = -\text{ज्या } \alpha$$

$$\therefore \text{रूप } (90^\circ + \alpha) = \frac{\text{ज्या}(90^\circ + \alpha)}{\text{कोज्या}(90^\circ + \alpha)} = \frac{\text{कोज्या } \alpha}{-\text{ज्या } \alpha} \\ = -\text{कोरूप } \alpha$$

इसी प्रकार व्युज्या $(90^\circ + \alpha) = \text{व्युत्कोज्या } \alpha,$

व्युत्कोज्या $(90^\circ + \alpha) = -\text{व्युज्या } \alpha,$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

उदाहरण— 120° की निष्पत्तियां निकालो।

$$\sin(120^\circ) = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned}\cos(120^\circ) &= \cos(90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\sin(120^\circ) = \sin(90^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

दोष निष्पत्तियां अब लिखी जा सकती हैं।

५.६ अ की कोई भी अर्ध होनेपर कोण $(180^\circ - \alpha)$ अथवा $(\pi - \alpha)$ की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को कोण अ की निष्पत्तियों के पदों में व्यक्त करना।

अनुच्छेद ५.४ और ५.५ की सहायता से कोण $(180^\circ - \alpha)$ की निष्पत्तियां सरलता से निकाली जा सकती हैं।

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin(90^\circ + 90^\circ - \alpha)$$

$$= \cos(90^\circ - \alpha)$$

(अनुच्छेद ५.५ से)

$$= \sin \alpha$$

(अनुच्छेद ५.४ से)

$$\begin{aligned}
 \text{कोज्या } (180^\circ - \alpha) &= \text{कोज्या } (90^\circ + 90^\circ - \alpha) \\
 &= -\text{ज्या } (90^\circ - \alpha) \\
 &\quad (\text{अनुच्छेद ५.२ से}) \\
 &= -\text{कोज्या } \alpha \\
 &\quad (\text{अनुच्छेद ५.३ से})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{इसी प्रकार, स्प } (180^\circ - \alpha) &= \text{स्प } (90^\circ + 90^\circ - \alpha) \\
 &= -\text{कोस्प } (90^\circ - \alpha) \\
 &= -\text{स्प } \alpha
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{इसलिए व्युज्या } (180^\circ - \alpha) &= \text{व्युज्या } \alpha, \\
 \text{व्युत्कोज्या } (180^\circ - \alpha) &= -\text{व्युत्कोज्या } \alpha \\
 \text{कोस्प } (180^\circ - \alpha) &= -\text{कोस्प } \alpha
 \end{aligned}$$

इनकी रैखिकीय उपपत्ति (proof) विद्यार्थियों के अभ्यास के लिए छोड़ दी गई है।

उदाहरण १. 180° की निष्पत्तियों का निश्चय करो।

$$\begin{aligned}
 \text{ज्या } 180^\circ &= \text{ज्या } (180^\circ - 0^\circ) = \text{ज्या } 0^\circ = 0 \\
 \text{कोज्या } 180^\circ &= \text{कोज्या } (180^\circ - 0^\circ) \\
 &= -\text{कोज्या } 0^\circ = -1
 \end{aligned}$$

$$\text{स्प } 180^\circ = \text{स्प } (180^\circ - 0^\circ) = -\text{स्प } 0^\circ = 0$$

इत्यादि

उदाहरण २. 135° की निष्पत्तियों का निश्चय करो।

$$\text{ज्या } 135^\circ = \text{ज्या } (180^\circ - 45^\circ) = \text{ज्या } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}\cos 135^\circ &= \cos (180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$$\sin 135^\circ = \sin (180^\circ - 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

इत्यादि

उदाहरण ३ 150° की निष्पत्तियों का निश्चय करो ।

$$\cos (150^\circ) = \cos (180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned}\sin (150^\circ) &= \sin (180^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\cos (150^\circ) = \cos (180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

इत्यादि

अलोक — 120° , 135° , 150° की निष्पत्तियां अनुच्छेद ५५ की सहायता से भी निकाली जा सकती हैं ।

७७ अ की कोई भी अर्धा होने पर कोण $(180^\circ + \alpha)$ अथवा $(\pi + \alpha)$ की निष्पत्तियों को कोण α की निष्पत्तियों के पदों में व्यक्त करना ।

अनुच्छेद ५५ के उत्तरोत्तर (successive) प्रयोग से

ये निष्पत्तियां निकाली जा सकती हैं।

इस प्रकार

$$\text{ज्या } (180^\circ + \alpha) = \text{ज्या } (90^\circ + 90^\circ + \alpha)$$

$$= \text{कोज्या } (90^\circ + \alpha) = -\text{ज्या } \alpha$$

$$\text{कोज्या } (180^\circ + \alpha) = \text{कोज्या } (90^\circ + 90^\circ + \alpha)$$

$$= -\text{ज्या } (90^\circ + \alpha) = -\text{कोज्या } \alpha$$

$$\text{रूप } (180^\circ + \alpha) = \text{रूप } (90^\circ + 90^\circ + \alpha)$$

$$= -\text{कोरूप } (90^\circ + \alpha) = \text{रूप } \alpha$$

$$\text{इसलिए व्युज्या } (180^\circ + \alpha) = -\text{व्युज्या } \alpha$$

$$\text{व्युत्कोज्या } (180^\circ + \alpha) = -\text{व्युत्कोज्या } \alpha$$

$$\text{कोरूप } (180^\circ + \alpha) = \text{कोरूप } \alpha$$

अभ्यास के लिए विद्यार्थियों को ये सम्बन्ध रैखिकी से भी सिद्ध करने चाहिये।

५.८ उदाहरण— कोण $(270^\circ - \alpha)$ और $(270^\circ + \alpha)$ की निष्पत्तियां निकालो।

$$\text{ज्या } (270^\circ - \alpha) = \text{ज्या } (180^\circ + 90^\circ - \alpha)$$

$$= -\text{ज्या } (90^\circ - \alpha) = -\text{कोज्या } \alpha$$

$$\text{कोज्या } (270^\circ - \alpha) = \text{कोज्या } (180^\circ + 90^\circ - \alpha)$$

$$= -\text{कोज्या } (90^\circ - \alpha) = -\text{ज्या } \alpha$$

$$\begin{aligned}\text{स्प } (२७०^{\circ}-\alpha) &= \text{स्प } (१८०^{\circ}+\overline{९०^{\circ}-\alpha}) \\ &= \text{स्प } (९०^{\circ}-\alpha) = \text{कोस्प } \alpha\end{aligned}$$

इत्यादि

$$\begin{aligned}\text{ज्या } (२७०^{\circ}+\alpha) &= \text{ज्या } (१८०^{\circ}+\overline{९०^{\circ}+\alpha}) \\ &= -\text{ज्या } (९०^{\circ}+\alpha) = -\text{कोज्या } \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{कोज्या } (२७०^{\circ}+\alpha) &= \text{कोज्या } (१८०^{\circ}+\overline{९०^{\circ}+\alpha}) \\ &= -\text{कोज्या } (९०^{\circ}+\alpha) = \text{ज्या } \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{स्प } (२७०^{\circ}+\alpha) &= \text{स्प } (१८०^{\circ}+\overline{९०^{\circ}+\alpha}) \\ &= \text{स्प } (९०^{\circ}+\alpha) = -\text{कोस्प } \alpha\end{aligned}$$

इत्यादि

अन्यथा (aliter):—

$$\begin{aligned}\text{ज्या } (२७०^{\circ}-\alpha) &= \text{ज्या } (३६०^{\circ}-९०^{\circ}-\alpha) \\ &= \text{ज्या } (-९०^{\circ}-\alpha) = -\text{ज्या } (९०^{\circ}+\alpha) \\ &= -\text{कोज्या } \alpha\end{aligned}$$

इत्यादि.

$$\begin{aligned}\text{कोज्या } (२७०^{\circ}+\alpha) &= \text{कोज्या } (३६०^{\circ}-९०^{\circ}+\alpha) \\ &= \text{कोज्या } (-९०^{\circ}+\alpha) \\ &= \text{कोज्या } (९०^{\circ}-\alpha) \\ &= \text{ज्या } \alpha \text{ इत्यादि.}\end{aligned}$$

५.२ साधित उदाहरण—

उदाहरण १. ज्या (1460°) और कोस्य (-804°) निकालो ।

$$\begin{aligned}\text{ज्या } (1460^\circ) &= \text{ज्या } (3 \times 360^\circ + 140^\circ) = \text{ज्या } 140^\circ \\ &= \text{ज्या } (180^\circ - 40^\circ) = \text{ज्या } 40^\circ = \frac{4}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{कोस्य } (-804^\circ) &= -\text{कोस्य } (804^\circ) \\ &= -\text{कोस्य } (360^\circ + 44^\circ) \\ &= -\text{कोस्य } 44^\circ = -\frac{3}{5}\end{aligned}$$

उदाहरण— सरल करो

$$\frac{[\sin 44^\circ + \sin (\text{ज्या} + \text{अ})] [\cos 404^\circ + \cos (\frac{\text{ज्या}}{2} + \text{अ})]}{[\cos \text{ज्या अ} + \text{ज्या}(\text{ज्या} - \text{अ})] [\text{ज्या}(\frac{\text{ज्या}}{2} + \text{अ}) + \text{ज्या}(\text{ज्या} + \text{अ})]}$$

और दिखाओ कि यदि $\text{अ} = \frac{\text{ज्या}^\circ}{2}$, तो इसकी मर्ही $\frac{4}{3}$ होगी ।

दी गई पदसंहति

$$\begin{aligned}&= \frac{(1 + \sin \text{अ}) [\cos (360^\circ + 44^\circ) - \sin \text{अ}]}{(\cos \text{ज्या अ} + \text{ज्या अ})(\cos \text{ज्या अ} - \text{ज्या अ})} \\ &= \frac{(1 + \sin \text{अ}) (1 - \sin \text{अ})}{\cos^2 \text{ज्या अ} - \text{ज्या}^2 \text{अ}} \\ &= \frac{1 - \sin^2 \text{अ}}{\cos^2 \text{ज्या अ} - \text{ज्या}^2 \text{अ}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 - \frac{\text{ज्या}^2 \text{अ}}{\text{कोज्या}^2 \text{अ}}}{\text{कोज्या}^2 \text{अ} - \text{ज्या}^2 \text{अ}} \\
 &= \frac{\text{कोज्या}^2 \text{अ} - \text{ज्या}^2 \text{अ}}{\text{कोज्या}^2 \text{अ}} \times \frac{1}{\text{कोज्या}^2 \text{अ} - \text{ज्या}^2 \text{अ}} \\
 &= \text{व्युत्कोज्या}^2 \text{अ}
 \end{aligned}$$

$$\text{यदि अ} = \frac{\text{प्या}}{६}$$

$$\begin{aligned}
 \text{तो पदसंहति} &= \text{व्युत्कोज्या}^2 \frac{\text{प्या}}{६} = \frac{1}{\text{कोज्या}^2 \frac{\text{प्या}}{६}} \\
 &= \frac{1}{(\sqrt{3})^2} = \frac{४}{३}
 \end{aligned}$$

उदाहरण ३. सिद्ध करो कि:—

$$\begin{aligned}
 &\left[\text{ज्या}^2 \left(\frac{\text{प्या}}{१२} \right) + \text{ज्या}^2 \left(\frac{३\text{प्या}}{१२} \right) + \text{ज्या}^2 \left(\frac{५\text{प्या}}{१२} \right) \right. \\
 &\quad + \text{ज्या}^2 \left(\frac{७\text{प्या}}{१२} \right) + \text{ज्या}^2 \left(\frac{९\text{प्या}}{१२} \right) \\
 &\quad \left. + \text{ज्या}^2 \left(\frac{११\text{प्या}}{१२} \right) \right] = ३
 \end{aligned}$$

$$\text{ज्या} \left(\frac{११\text{प्या}}{१२} \right) = \text{ज्या} \left(\text{प्या} - \frac{\text{प्या}}{१२} \right) = \text{ज्या} \left(\frac{\text{प्या}}{१२} \right)$$

$$\text{ज्या} \left(\frac{९\text{प्या}}{१२} \right) = \text{ज्या} \left(\text{प्या} - \frac{३\text{प्या}}{१२} \right) = \text{ज्या} \left(\frac{३\text{प्या}}{१२} \right)$$

$$\text{ज्या} \left(\frac{७\text{प्या}}{१२} \right) = \text{ज्या} \left(\text{प्या} - \frac{५\text{प्या}}{१२} \right) = \text{ज्या} \left(\frac{५\text{प्या}}{१२} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{इसलिए वामपक्ष} = २ \left[\text{ज्या}^२ \left(\frac{\text{प्या}}{१२} \right) + \text{ज्या}^२ \left(\frac{३\text{प्या}}{१२} \right) \right. \\ \left. + \text{ज्या}^२ \left(\frac{५\text{प्या}}{१२} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{परंतु ज्या} \left(\frac{५\text{प्या}}{१२} \right) = \text{ज्या} \left(\frac{\text{प्या}}{२} - \frac{\text{प्या}}{१२} \right) = \text{कोज्या} \left(\frac{\text{प्या}}{१२} \right)$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{वामपक्ष} = २ \left[\left\{ \text{ज्या}^२ \left(\frac{\text{प्या}}{१२} \right) + \text{कोज्या}^२ \left(\frac{\text{प्या}}{१२} \right) \right\} \right. \\ \left. + \text{ज्या}^२ \left(\frac{३\text{प्या}}{१२} \right) \right] \end{aligned}$$

$$= २ \left[१ + \text{ज्या}^२ \left(\frac{\text{प्या}}{१२} \right) \right]$$

$$= २ \left[१ + \left(\frac{१}{\sqrt{२}} \right)^२ \right]$$

$$= २ \times \frac{३}{२} = ३$$

उदाहरण ४— यदि स कोई पूर्णांक हो तो सिद्ध करो कि
कोज्या (स प्या + अ) = $(-1)^s$ कोज्या अ

प्रथम, मान लो कि स, २ध सम एक युग्म पूर्णांक है जहाँ
अ कोई भी एक पूर्णांक है।

$$\begin{aligned}\text{तो कोज्या (स प्या + अ)} &= \text{कोज्या (२ ध प्या + अ)} \\ &= \text{कोज्या (घ३६०° + अ)} \\ &= + \text{कोज्या अ} \\ &= (-1)^{२ध} \text{ कोज्या अ} \\ &= (-1)^s \text{ कोज्या अ}\end{aligned}$$

अब मान लो कि स एक अयुग्म पूर्णांक है और (२ध + १)
के सम है जिसमें अ कोई भी एक पूर्णांक है।

$$\begin{aligned}\therefore \text{कोज्या (स प्या + अ)} &= \text{कोज्या (२ध + १ प्या + अ)} \\ &= \text{कोज्या (२ध प्या + प्या + अ)} \\ &= \text{कोज्या (प्या + अ)} \\ &= - \text{कोज्या अ} \\ &= (-1)^{२ध+१} \text{ कोज्या अ} \\ &= (-1)^s \text{ कोज्या अ}\end{aligned}$$

इस प्रकार, किसी भी पूर्णांक स के लिए,

$$\text{कोज्या (स प्या + अ)} = (-1)^s \text{ कोज्या अ}$$

प्रश्नावलि ६

- (१) निम्नलिखित समीकारों का समाधान करने वाली, 0° और 360° के बीच की अक्षोण की अर्द्धांश निश्चित करो:—

(क) जथा $\alpha = \frac{1}{2}$ (का) व्युत्क्रोश्या $\alpha = \sqrt{2}$

(कि) स $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

- (२) यदि α , α , α , α किसी चतुर्भुज (cyclic) के कोण हों तो सिद्ध करो कि

$$\cos \alpha + \cos \alpha + \cos \alpha + \cos \alpha = 0$$

(कलकत्ता १८६५)

- (३) सरल करो:—

$$\frac{\cos(90^\circ - \alpha) \cos(-\alpha) \sin(180^\circ + \alpha)}{[1 + \cos(180^\circ - \alpha)][1 - \cos(360^\circ + \alpha)] \cos(90^\circ - \alpha)}$$

सिद्ध करो कि:—

- (४) जथा (450°) कोश्या (330°)

$$+ \cos(-240^\circ) \sin(-330^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$(५) \quad \text{स्प} (२४०^\circ) \text{ कोज्या} (३२०^\circ) \\ + \text{ज्या} (८४०^\circ) \text{ कोस्प} (-३०^\circ) = ०$$

$$(६) \quad \text{कोज्या} (६००^\circ) \text{ कोज्या} (१७०^\circ) \\ = \text{ज्या} (२४०^\circ) \text{ ज्या} (६९०^\circ) = \frac{\sqrt{३}}{४}$$

$$(७) \quad \text{स्प} \left(\frac{\text{ज्या}}{२} - \text{अ} \right) \text{ व्युत्कोज्या} (\text{अ}) \text{ ज्या} \left(\frac{\text{ज्या}}{२} + \text{अ} \right) \\ = \text{कोस्प} (\text{ज्या} - \text{अ}) \text{ व्युत्ज्या} \left(\frac{\text{ज्या}}{२} - \text{अ} \right) \\ \times \text{कोज्या} (\text{ज्या} + \text{अ})$$

$$(८) \quad \text{कोज्या}^n \frac{\text{ज्या}}{२०} + \text{कोज्या}^{n-१} \frac{\text{ज्या}}{२०} + \text{कोज्या}^{n-२} \frac{\text{ज्या}}{२०} + \dots \\ \dots + \text{कोज्या}^1 \frac{\text{ज्या}}{२०} = ०$$

$$(९) \quad \text{स्प} (\text{ज्या} + \text{अ}) + \text{स्प} (२\text{ज्या} - \text{अ}) + \text{स्प} (३\text{ज्या} + \text{अ}) \\ + \text{स्प} (४\text{ज्या} - \text{अ}) + \dots + \text{स्प} [(२स - १)\text{ज्या} + \text{अ}] \\ + \text{स्प} (२स \text{ ज्या} - \text{अ}) = ०$$

(१०) सिद्ध करो कि यदि स अयुग्म अथवा युग्म हो तो तदनुसार

$$\text{ज्या अ} + \text{ज्या}(\text{ज्या} + \text{अ}) \\ + \text{ज्या}(२\text{ज्या} + \text{अ}) + \dots \text{स पदों तक} \\ = \text{ज्या अ अथवा} = ०$$

(११) दिखाओ कि निम्नलिखित पद-संहतियों में से प्रत्येक ८ के सम है :—

$$(अ) व्युत्क्रोज्या^२ \left(\frac{प्या}{४} \right) + व्युत्क्रोज्या^२ \left(\frac{३प्या}{४} \right)$$

$$+ व्युत्क्रोज्या^२ \left(\frac{५प्या}{४} \right) + व्युत्क्रोज्या^२ \left(\frac{७प्या}{४} \right)$$

$$(आ) व्युज्ज्या \left(\frac{प्या}{४} \right) व्युज्ज्या^२ \left(\frac{३प्या}{४} \right) \times$$

$$व्युज्ज्या \left(\frac{५प्या}{४} \right) व्युज्ज्या^२ \left(\frac{७प्या}{४} \right)$$

$$(इ) व्युत्क्रोज्या \frac{प्या}{४} \left(कोज्या \frac{प्या}{४} + ज्या \frac{प्या}{४} \right)$$

$$+ व्युत्क्रोज्या \frac{३प्या}{४} \left(कोज्या \frac{३प्या}{४} - ज्या \frac{३प्या}{४} \right)$$

$$+ व्युत्क्रोज्या \frac{५प्या}{४} \left(कोज्या \frac{५प्या}{४} + ज्या \frac{५प्या}{४} \right)$$

$$+ व्युत्क्रोज्या \frac{७प्या}{४} \left(कोज्या \frac{७प्या}{४} - ज्या \frac{७प्या}{४} \right)]$$

(१२) • यदि स एक घन पूर्णांक हो, और

$$इ = \left\{ \frac{प्या}{२} - (२ स - १) इ \right\} \text{ हो तो सिद्ध करो कि}$$

$$स इ. सपरेइ. सप१इ.....सप (२ स - १)इ = १$$

छठा अध्याय

दत्त त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों वाले सब कोणों के लिए सामान्य (general) पद-संहतियाँ

६.१ पिछले अध्याय से यह स्पष्ट हो जाता है कि यदि त्रिकोणमितीय निष्पत्ति की एक अर्धा दी हुई हो तो ऐसे असंख्य कोण हो सकते हैं जिनकी वह त्रिकोणमितीय निष्पत्ति दत्त संख्या के सम हो।

उदाहरणार्थ यदि ज्या $\alpha = \frac{1}{2}$ हो तो α , 30° अथवा

इसके ऋजुपूरक (supplementary) कोण 150° के सम हो सकता है। इनके अतिरिक्त यदि ऊपर के दोनों कोणों को 360° अथवा 360° के अपवर्त्यों से घटाया अथवा घटाया जाए तो प्राप्त नये कोणों की अर्हाएँ भी α की अर्हा हो सकती हैं। इस प्रकार, 30° , 150° , 390° , 450° , (-390°) , (-450°) ... इत्यादि प्रत्येक कोण की ज्या $\frac{1}{2}$ है।

यह नियम दूसरी निष्पत्तियों के लिये भी लागू होता है।

अब कुछ ऐसी सामान्य पद-संहतियों का निदख किया जायगा जिनमें दत्त त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों वाली अनंत कोण-श्रेणियों (series of angles) का समावेश होता है।

६.२ मानलो कि परिभ्रमणरेखा प्रारंभिक स्थिति मय

पर है। तो घन अथवा ऋण दिशा में, उसके ०, १, २, ३,

आ ६.१

या ४..... पूर्ण परिभ्रमण हो चुके हैं। यदि उसका सर्वथा परिभ्रमण न हुआ हो तो उसके द्वारा अनुरेखित कोण शून्य होगा। यदि उसका, घन दिशा में, एक पूर्ण परिभ्रमण हो चुका हो तो अनुरेखित कोण २८५ आर होगा; यदि उसका, ऋण दिशा में, एक पूर्ण परिभ्रमण हो चुका हो तो अनुरेखित कोण - २८५ आर होगा।

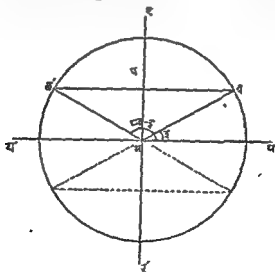
मान लो रेखा के दो पूर्ण परिभ्रमण हो चुके हैं; और यदि परिभ्रमण प्रतिघटीयत् या घटीयत् हुआ हो तो अनुरेखित कोण ४८५ अथवा - ४८५ होगा।

इस प्रकार जब परिभ्रमण रेखा मय स्थिति पर रहती है, तो अनुरेखित कोण ०, अथवा ± २८५ , अथवा ± ४८५ ; अथवा ± ६८५इत्यादि, के सम होता है। यदि स शून्य अथवा घन अथवा ऋण कोई पूर्णांक हो तो ये सब कोण २. स.८५ व्यंजन (expression) में समाविष्ट हो जाते हैं। मय' स्थिति पर आने के लिये परिभ्रमण रेखा को, पूर्ण परिभ्रमण कर पाहिले स्थिते मय पर आना चाहिए। इसके पश्चात् ऋण अथवा घन दिशा में, एक अर्ध परिभ्रमण कर परिभ्रमण रेखा मय' से संपतन

करेगी, और इस दशा में, अनुरेखित कोण (२ स.प्या + प्या), अथवा (२ स. प्या - प्या), अर्थात् (२ स ± १) प्या के सम होगा।

६.३ दी हुई ज्या वाले लघुत्तम धन कोण की रचना करना और एक ही ज्या वाले सय कोणों को समाविष्ट करने वाली सामान्य पद-संहति निकालना।

मान लो कि किसी कोण की ज्या 'क्ष' है। म बिंदु पर मियछेदी परस्पर लम्ब रेखाएं, यय' और रर' लो। म को केन्द्र मानकर ऐसा वृत्त खींचो जिसकी त्रिजा एक हो। रेखा मर पर (और यदि 'क्ष' शून्य हो तो मर' पर) मप = क्ष काटो। प से निकलती हुई सरल रेखा य'पय, रेखा य'मय के समान्तर खींचो, जो वृत्त का व और य' पर छेड़न करे।



आ. ६.२

यमव कोण का इ से अभिधान किया जाय तो,

$$\text{ज्या इ} = \text{ज्या यमव} = \text{ज्या मवप} = \frac{\text{मप}}{\text{मव}} = \text{क्ष}$$

इसलिए दी हुई ज्या वाला लघुत्तम घन कोण इ है।

आकृति से स्पष्ट है कि इतनी ही ज्या का एक दूसरा कोण यमव' = (व्या - इ) है।

यदि 'क्ष' की महत्ता और उसका चिह्न दिया हों तो रमर' रेखा पर प बिंदु की स्थिति स्थिर हो जाती है। इस प्रकार परिभ्रमणरेखा क एक पूर्ण परिभ्रमण में, अनुरेखित कोण की दी हुई ज्या वाली केवल दो ही अर्थापि हो सकती हैं। अर्थात् जब परिभ्रमणरेखा मव अथवा मव' स्थितियों के अतिरिक्त और किसी दूसरी स्थिति पर न हो तो अनुरेखित कोण की ज्या, दत्त अर्धा क्ष के समान होती है। (अनुच्छेद ५.६ देखो)

जब परिभ्रमणरेखा मव स्थिति पर रहती है तो यह एक अथवा अनेक (अथवा शून्य) पूर्ण परिभ्रमण करने के पश्चात् इ कोण बनाती है। अर्थात्, पिछले अनुच्छेद से यदि घ शून्य अथवा घन अथवा ऋण कोई पूर्णांक हो, तो परिभ्रमण-रेखा कोण (२घ. व्या + इ) (१) बनाती है।

यदि परिभ्रमण-रेखा मव' स्थिति पर हो तो अनुरेखित कोण $[२ घ व्या + (व्या - इ)]$ अर्थात् $[(२घ + १) व्या - इ]$ (२) के सम होता है।

ऊपर के दोनों कोण-कुलक (sets of angles) पद-संहति, स. व्या + $(-१)^घ$ इ (३) में समाविष्ट होते हैं जहाँ स शून्य, अथवा घन अथवा ऋण कोई पूर्णांक है। क्यों क यदि स = २घ है तो $(-१)^{२घ} = +१$,

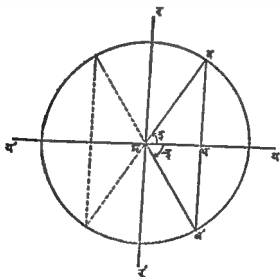
अतः पद-संहति (३) का (२ घ. प्या + ६) में रूपान्तरण हो जाता है जो पद-संहति (१) ही है ।

और यदि $s = २घ$ तो $(-१)^{२घ+१} = -१$ ।

अतः पद-संहति (३) का $[(२घ + १) प्या - ६]$ में रूपान्तरण हो जाता है जो पदसंहति (२) ही है ।

उपप्रेम्यः—क्योंकि एक ही ज्या वाले सव कोणों की व्युत्क्रमज्याएँ भी समान होती हैं; अतः पद-संहति (३), एक ही व्युत्क्रमज्या वाले सव कोणों के लिये भी सामान्य पदसंहति है ।

६.४ दत्त कोज्या वाले लघुत्तम धन कोण की रचना करना और एक ही कोज्या वाले सव कोणों को समाधिष्ट करने वाली सामान्य पद-संहति निकालना ।



आ. ६.३

मान लो की दत्त कोज्या 'क्ष' है। बिन्दु म पर मिथदछेदी दो लम्ब रेखाएं य'मय और र'मर लो। मय पर (और यदि 'क्ष' द्रवण हो, तो मय' पर) मप = क्ष काटो। प से निकलती हुई सरलरेखा य'पय रेखा र'मर के समान्तर खींचो।

म को केन्द्र मान कर एक वृत्त खींचो जिसकी त्रिज्या एरु हो। मान लो कि रेखा य पय इस वृत्त का य' और य पर छेदन करती है। कोण यमय का इ से अभिधान करो।

$$\text{तो कोज्या इ} = \text{कोज्या यमय} = \frac{\text{मप}}{\text{मय}} = \text{क्ष}$$

इसलिए दत्त कोज्या वाला लघुत्तम धन कोण इ है। आकृति से यह स्पष्ट है कि इतनी ही कोज्या वाला एक दूसरा कोण यमय' = - इ है।

यदि क्ष की महत्ता और उसका चिह्न, दिए हों तो रेखा य'मय पर बिन्दु प को स्थिति स्थिर हो जाती है। इस प्रकार परिभ्रमण रेखा क एक पूर्ण परिभ्रमण में, अनुरेखित कोण की, दत्त कोज्या वाली, केवल दो ही अर्थात् हो सकती हैं। अर्थात् जब परिभ्रमण रेखा मय अथवा मय' स्थितियों के अतिरिक्त और किसी दूसरी स्थिति पर न हो, तो अनुरेखित कोण की कोटिज्या दत्त अर्थात् क्ष के समान होती है। (अनु० ५.२ देखो)

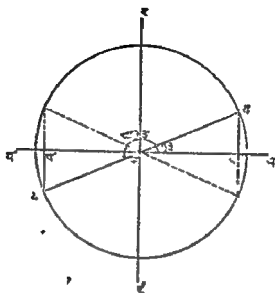
जब परिभ्रमण रेखा मग स्थिति पर रहती है, तो वह शून्य अथवा कई पूर्ण परिभ्रमण करने के पश्चात् इ कोण बनाती है। अर्थात् यदि स शून्य, अथवा धन अथवा ऋण कोई पूर्णांक हो तो अनुरेखित कोण (२ स प्या + इ) के सम होता है।

जब परिभ्रमण रेखा मग स्थिति पर रहती है तो वह शून्य अथवा एक अथवा अनेक पूर्ण-परिभ्रमण करने के पश्चात् इ कोण बनाती है। अर्थात् इस दशा में अनुरेखित कोण (२ स प्या - इ) के सम होता है।

ये सब कोण पदसंहति (२ स प्या \pm इ).....(१) में समाविष्ट हैं जहाँ स शून्य अथवा धन अथवा ऋण पूर्णांक है।

उपमेयः— क्योंकि एक ही कोज्या वाले सब कोणों की व्युत्कोज्याएं भी समान होती हैं, अतः पदसंहति (१) एक ही व्युत्कोज्या वाले सब कोणों के लिये भी सामान्य पदसंहति है।

६. ५ दत्त स्पर्शज्या वाले लघुत्तम धन कोण की रचना करना और एक ही स्पर्शज्या वाले सब कोणों को समाविष्ट करने वाली सामान्य पदसंहति निकालना।



आ. ६.४

मान लो की हुई स्पर्शज्या 'क्ष' है। म बिन्दु पर मिथ-इच्छेदी परस्पर लंब रेखाएं य'मय और र'मर लो। मय पर लम्बाई मय = १ काटो और प से मय पर लंब पय = क्ष खींचो। कोण यमय का इ से अभिधान करो। तो दत्त स्पर्शज्या वाला लघुत्तम घन कोण ई होगा।

न को केन्द्र मानकर मय के सम त्रिज्या का एक वृत्त खींचो। वम को बढ़ाओ जिससे वह वृत्त से व' बिन्दु में मिले और मय' पर लम्ब व'प' खींचो।

तो $\angle यमय' = (\text{प्या} + इ)$ की स्पर्शज्या ओ 'क्ष' होगी।

पुनः, यदि परिभ्रमण-रेखा स्थिति मय अथवा मय' के अतिरिक्त और किसी दूसरी स्थिति पर न हो, नो अनुरोक्षित कोण की स्पर्शज्या दन्त स्पर्शज्या के सम होती है।

(अनुच्छेद ५.६ देखो)

अब परिभ्रमण-रेखा मय स्थिति पर रहती है तो अनु-रोक्षित कोण (२धप्या+इ) के सम होता है जहां ध शून्य, धन अथवा ऋण पूर्णांक हो।

अब परिभ्रमण रेखा मय' स्थिति पर रहती है, तो अनु-रोक्षित कोण २धप्या+(प्या+इ)

अथवा [(२ध+१) प्या प्या+इ] के सम होता है।

य सब कोण पदसंहति स+प्या+इ.....(१)

मैं जहां स शून्य धन अथवा ऋण कोई पूर्णांक है समाविष्ट हो जाते हैं।

उपप्रेम्य :— एक ही स्पर्शज्या वाले सब कोणों की कोटिस्पर्शज्याएं भी समान होती है, अतः पदसंहति (१) एक ही कोटिस्पर्शज्या वाले सब कोणों के लिये भी सामान्य पद-संहति है।

६.६, कुछ सघटित उदाहरणः—

उदाहरण— उन सब कोणों को समाविष्ट करनेवाली सामान्य पदसंहतियां लिखो

(क) जिनकी ज्या $\frac{1}{\sqrt{2}}$ है।

(ख) जिनकी कोज्या $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ है।

(ग) जिनकी स्पर्शज्या $\sqrt{3}$ है।

(क) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ज्या वाला लघुतम धन कोण 45° अथवा

$\frac{\pi}{4}$ है।

इसलिए अनुच्छेद ६.३ से, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ज्या वाले सब कोणों के लिए सामान्य पदसंहति

$$\left\{ \text{स ज्या} + (-1)^{\text{स}} \frac{\pi}{4} \right\} \text{ है।}$$

(ख) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ कोज्या वाला लघुतम धन कोण 150°

अथवा $\frac{5\pi}{6}$ है।

(ग) $\sqrt{3}$ स्पर्शज्या वाला लघुतम धन कोण 60° अथवा $\frac{\pi}{3}$ है।

इसलिए, अनुच्छेद ६.५ से, $\sqrt{3}$ स्पर्शज्या वाले सब कोण के लिए साधारण पदसंहति $\text{स ज्या} + \frac{\pi}{3}$ है।

उदाहरण २.— समीकार $\text{ज्या}^2 \alpha = \frac{1}{2}$ का साधन करो और कोण α की सामान्यतम (most general) अर्ह निकालो ।

$$\text{ज्या}^2 \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{ज्या } \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

उत्तर (upper) चिह्न लेने पर,

$$\text{ज्या } \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \text{ज्या } \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \alpha = \text{स } \pi + (-1)^{\text{स } \pi} \frac{\pi}{4}$$

अधर (lower) चिह्न लेने पर,

$$\text{ज्या } \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \text{ज्या } \left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore \alpha = \text{स } \pi + (-1)^{\text{स } \pi} \left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

इन दोनों साधनों (solutions) को संयुक्त करने से, α की सामान्यतम अर्ह

$$\alpha = \text{स } \pi \pm \frac{\pi}{4} \text{ प्राप्त होती है ।}$$

उदाहरण ३— समीकार फोज्या अ $-\frac{1}{2}$ और

स्पअ = $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ का समाधान करने वाली (satisfying) कोण अ की सामान्यतम अर्धपं निकालो ।

फोज्या अ $-\frac{1}{2}$ का समाधान करने वाली, 0° और 360° के बीच की अ की अर्धपं 30° और 330° हैं ।

इसी प्रकार स्पअ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ को समाधान करने वाली 0° और 360° के बीच की अ अर्धपं 150° और 330° हैं ।
 \therefore दोनों समीकारों का समाधान करने वाली 0° और 360° के बीच की, अ की साधारण अर्ध केवल 330° अथवा $\frac{11\pi}{6}$ है ।

इस कोण में चार लम्ब कोणों के किसी भी अपवर्त्य के योग से अ की सामान्यतम अर्ध प्राप्त होती है ।

इसलिए अ की अपेक्षित अर्ध

$$2\pi + \frac{11\pi}{6} \text{ है ।}$$

प्रश्नावलि ७

निम्नलिखित सभीकारों का समाधान करने वाली कोण α की सामान्यतम अर्हाणि निश्चित करो :—

- (१) ज्या $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (२) कोज्या $\alpha = 0$
 (३) कोस्प $\alpha = -1$ (४) व्युत्कोज्या^२ $= 4$
 (५) स्प^२ $\alpha = 1$
 (६) 4 व्युत्कोज्या^२ $\alpha - 3$ स्प^२ $\alpha = 3$
 (७) यदि स कोई पूर्णांक हो तो सिद्ध करो, कि निम्न-
 लिखित दोनों सूत्र एक ही कोण निरूपित करते
 हैं :—

$$(2s-1)\frac{\text{ज्या}}{2} + (-1)^s \frac{\text{ज्या}}{2} \text{ और } 2s\text{ज्या} \pm \frac{\text{ज्या}}{2}$$

- (८) सिद्ध करो कि $s\text{ज्या} + (-1)^s (\text{ज्या} - 2)$ और
 $\left(2s\text{ज्या} \pm \frac{3\text{ज्या}}{2} - \frac{\text{ज्या}}{2}\right) \pm 2$ दोनों सूत्र एक
 ही कोण का निरूपण करते हैं।

- (९) कोस्प $\alpha = 1$ और ज्या $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ इन दोनों
 सभीकारों का समाधान करने वाली कोण α की
 सामान्यतम अर्हा निकालो।

- (१०) यदि स्प^२ $\alpha +$ कोस्प $\alpha +$ स्प^२ $\frac{\text{ज्या}}{4}$ कोस्प $\frac{3\text{ज्या}}{4} = 0$

हो, तो सिद्ध करो कि इन समीकार का समाधान करनेवाली x की अर्थात् समान्तर श्रेढी में हैं और इस श्रेढी का प्रचय (common difference) निकालो ।

६.७ जिस समीकार में एक अथवा अनेक त्रिकोणमितीय निष्पत्तियां अन्तर्भूत हों, उसे त्रिकोणमितीय समीकार कहते हैं ।

नीचे कुछ सरल त्रिकोणमितीय समीकार सिद्ध किए गए हैं ।

उदाहरण १— सिद्ध करो :—

$2 \cos^2 A + \sqrt{2} \cos A = 2$ [कलकत्ता १९०२]
यह समीकार इस प्रकार लिखा जा सकता है :—

$$2(1 - \cos^2 A) + \sqrt{2} \cos A = 2$$

$$\text{अथवा } 2 - 2\cos^2 A + \sqrt{2} \cos A = 2$$

$$\text{अथवा } \sqrt{2} \cos A (1 - \sqrt{2} \cos A) = 0$$

$$\text{अतः या तो } \cos A = 0 \quad \dots\dots\dots (१)$$

$$\text{अथवा } 1 - \sqrt{2} \cos A = 0 \quad \dots\dots\dots (२)$$

(१) से,

$$\cos A = 0 = \cos 90^\circ$$

अतः A की सामान्यतम अर्धा $A = 90^\circ$ प्या है ।

(२) से,

$$\cos A = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ$$

अतः x की दूसरी सामान्यतम मर्दा

$$x = s \text{ प्या} + (-1)^s \frac{\text{प्या}}{2} \text{ है।}$$

उदाहरण २— सिद्ध करो :—

$$\text{स्प } x = \text{कोस्प } t \text{ अ}$$

$$\text{स्प } x = \text{कोस्प } t \text{ अ} = \text{स्प} \left(\frac{\text{प्या}}{2} - t \text{ अ} \right)$$

अतः यदि s शून्य अथवा धन अथवा ऋण कोई पूर्णांक हो तो ,

$$x = s \text{ प्या} + \left(\frac{\text{प्या}}{2} - t \text{ अ} \right)$$

$$\text{अथवा } x = \left(s + \frac{1}{2} \right) \frac{\text{प्या}}{t+1}$$

प्रश्नावलि ८

इन समीकारों का साधन करो :—

$$(1) \text{ प्या}^2 x + \frac{\sqrt{2}-1}{2} \text{ कोज्या } x$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} - \sqrt{2} \right) = 0$$

$$(2) \text{ व्युज्ज्या}^2 \text{ अ} + \text{कोस्प}^2 \text{ अ} = 3\text{कोस्प अ}$$

[कलकत्ता १९०८]

$$(3) 2 \text{ स्प}^2 \text{ य} = 9 - 3 \text{ व्युत्कोज्या य} \quad [\text{नागपुर १९३९}]$$

$$(4) \sqrt{3} - \text{ज्या अ कोज्या अ} = \sqrt{3} \text{ज्या}^2 \text{ अ}$$

$$(5) \text{ ज्या } 9 \text{ अ} = \text{ज्या } 3 \text{ अ}$$

$$(6) \text{ कोज्या } 4 \text{ अ} = \text{ज्या ग}$$

$$(7) \text{ कोस्प अ} = \text{कोस्प } \frac{1}{\text{अ}}$$

$$(8) \text{ स्प } (5 + \sqrt{5}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{और कोस्प } (5 - \sqrt{5}) = \sqrt{3}$$

$$(9) \text{ कोज्या } (3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{और कोज्या } (4\sqrt{2} + 3\sqrt{2}) = \frac{1}{2}$$

$$(10) \text{ समीकार क कोज्या अ} + \text{ख ज्या अ} = ग \text{ का साधन करो और दिखाओ कि यदि } क^2 + ख^2 = ग^2 \text{ हो तो अ की दोनों अर्थां स समान होंगी।}$$

[कलकत्ता १८८२]

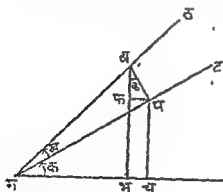
सातवां अध्याय

योग और वियोग प्रमेय गुणन-सूत्र

७.१ योग-प्रमेय (addition theorem)—

जब यह सिद्ध किया जायगा कि

ज्या $(\phi + \psi) =$ ज्या क. कोज्या $\psi +$ कोज्या क. ज्या ψ
और, कोज्या $(\phi + \psi) =$ कोज्या क. कोज्या $\psi -$ ज्या क. ज्या ψ
मान लो परिभ्रमण रेखा मय स्थिति से प्रतिघटीवत् परि-



आ. ७.१

भ्रमण आरम्भ कर,
कोण यमठ (= ϕ) का
अनुरेखण करती है
और पुनः कोण टमठ
(= ψ) का अनुरेखण
करती है। इसलिए

$$\begin{aligned} \angle \text{यमठ} &= \angle \text{यमठ} + \angle \text{टमठ} \\ &= \phi + \psi \end{aligned}$$

यरेखा मठ पर कोई बिंदु
व लो और रेखा मय
और रेखा मठ पर

क्रमशः वम और वप लंब खींचो। बिंदु प से रेखा मय और
रेखा वम पर क्रमशः पव और पफ लम्ब खींचो।

\angle मभय और \angle मपय लंब कोण हैं, इसलिए बिंदु म, भ, प और य संवृतीय (concyolic) होंगे।

अतः \angle पयभ और \angle भमप के एक ही खंड (segment) में होने के कारण,

$$\angle \text{पयभ} = \angle \text{भमप} = \kappa$$

$$\text{अर्थात् } \angle \text{पयभ} = \kappa \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{इसलिए, ज्या}(\kappa + \chi) = \text{ज्या} \angle \text{यमठ} = \frac{\text{भय}}{\text{मय}} = \frac{\text{भफ} + \text{फय}}{\text{मय}}$$

पफभच आयत (rectangle) है।

$$\text{अतः भफ} = \text{चप}$$

$$\therefore \text{ज्या}(\kappa + \chi) = \frac{\text{चप}}{\text{मय}} + \frac{\text{फय}}{\text{मय}}$$

$$= \frac{\text{चप}}{\text{मप}} \cdot \frac{\text{मप}}{\text{मय}} + \frac{\text{फय}}{\text{पय}} \cdot \frac{\text{पय}}{\text{मय}}$$

$$\therefore \text{ज्या}(\kappa + \chi) = \text{ज्या } \kappa \text{ कोज्या } \chi + \text{कोज्या } \kappa \text{ ज्या } \chi$$

$$\text{पुनः, कोज्या}(\kappa + \chi) = \text{कोज्या } \angle \text{यमठ} = \frac{\text{मभ}}{\text{मय}}$$

$$= \frac{\text{मच} - \text{भय}}{\text{मय}}$$

$$\text{और मच} = \text{फप}$$

$$\therefore \text{कोज्या (क + ख)} = \frac{\text{मच}}{\text{मव}} - \frac{\text{फप}}{\text{मव}}$$

$$= \frac{\text{मच}}{\text{मप}} \cdot \frac{\text{मप}}{\text{मव}} - \frac{\text{फप}}{\text{पव}} \cdot \frac{\text{पव}}{\text{मव}}$$

$$= \text{कोज्या क. कोज्या ख} - \text{ज्या } \angle \text{ पयफ. ज्या ख}$$

$$= \text{कोज्या क. कोज्या ख} - \text{ज्या क. ज्या ख}$$

$$\therefore \text{कोज्या (क + ख)} = \text{कोज्या क. कोज्या ख} - \text{ज्या क. ज्या ख}$$

७.११ गतानुच्छेद की आरुति, कोण क और कोण ख के धन तथा नि कोण होने की दशा के लिये खींची गई थी, परन्तु किन्हीं महत्ताओं के कोणों के लिए भी यही उपपत्ति लागू होती है। केवल राशियों के चिन्हों पर उचित ध्यान देने की आवश्यकता है।

ऊपर दिये गए प्रमेयों की सत्यता इस प्रकार से भी दर्शाई जा सकती है।

पहले मान लो क और ख न्यून कोण हैं, अतः (गतानुच्छेद से) क और ख के लिए ये प्रमेय सत्य हैं।

अब मान लो कि $k_1 = 90^\circ + k$

और $x_1 = x$

तो $\text{ज्या (क}_1 + \text{ख}_1) = \text{ज्या}(90^\circ + k + x) = \text{कोज्या}(k + x)$

$$= \text{कोज्या क. कोज्या ख} - \text{ज्या क. ज्या ख}$$

(पिछले अनुच्छेद से)

परंतु ज्या $(90^\circ + क)$ = कोज्या क
और कोज्या $(90^\circ + क)$ = -ज्या क

$$\begin{aligned}\therefore ज्या (क_1 + ख_1) &= ज्या (90^\circ + क) कोज्या ख \\ &\quad + कोज्या (90^\circ + क) ज्या ख \\ &= ज्या क, कोज्या ख, + कोज्या क, ज्या ख, \\ &\quad \dots\dots\dots (१)\end{aligned}$$

इसी प्रकार,

$$\begin{aligned}कोज्या (क_1 + ख_1) &= कोज्या (90^\circ + क + ख) \\ &= -ज्या (क + ख) \\ &= -ज्या क कोज्या ख - कोज्या क ज्या ख \\ &\quad (७.१ अनुच्छेद से) \\ &= कोज्या (90^\circ + क) कोज्या ख - ज्या (90^\circ + क) ज्या ख \\ &= कोज्या क, कोज्या ख, - ज्या क, ज्या ख, \\ &\quad \dots\dots\dots (२)\end{aligned}$$

इसी प्रकार ख के स्थान में ख_२ = ९०° + ख लिखकर भी प्रमेय (१) और (२) सिद्ध किए जा सकते हैं।

इसी प्रकार क_२ = ९०° + क_२ और ख_२ = ९०° + ख, लेने से, क और ख की, ०° और २७०° के बीच की किन्हीं भी महत्ताओं के लिए, इन प्रमेयों की सत्यता सिद्ध होती है।

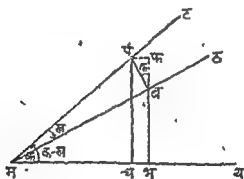
इस रीति से अग्रसर होने पर क और ख की किन्हीं भी महत्ताओं के लिए इन प्रमेयों की सत्यता सिद्ध की जा सकती है।

७.२ वियोग-प्रमेय (subtraction theorem)—

अब यह सिद्ध किया जायगा कि,

ज्या (क-ख) = ज्या क कोज्या ख - कोज्या क ज्या ख

और कोज्या(क-ख) = कोज्या क कोज्या ख + ज्या क ज्या ख



आ ७.२

मान लो कि परिभ्रमण-रेखा म य स्थिति से प्रतिघटीवत् परिभ्रमण करना आरम्भ कर कोण यमट (=क) का। अनु-रेखण करती है और तदनंतर घटीवत् परिभ्रमण कर महत्ता में ख के समान एक कोण का अनुरेखण करती है और इस प्रकार अंतिम स्थिति मठ पर आ पंहुचती है

$$\text{इसलिये } \angle \text{यमठ} = \angle \text{यमट} - \angle \text{टमठ} \\ = \text{क} - \text{ख}$$

रेखा मठ पर बिंदु व लो औ व से रेखा मय और मठ पर क्रमशः वम और यम लम्ब खींचो। बिंदु प से रेखा मय और चर्चित रेखा भव पर क्रमशः लम्ब पच और पफ खींचो।

क्योंकि $\angle \text{ममव} + \angle \text{मपव} = 180^\circ$
अतः चतुर्भुज ममवप वृत्तीय (cyclic) है।

$$\angle \text{पवफ} = \angle \text{ममप} = \text{क} \dots\dots\dots (1)$$

इसलिए ज्या (क - ख) = ज्या यमठ - $\frac{\text{भव}}{\text{मय}} = \frac{\text{भफ} - \text{यफ}}{\text{मय}}$
परन्तु, पफभच एक आयत है। अतः भफ = चप

$$\therefore \text{ज्या (क - ख)} = \frac{\text{चप}}{\text{मय}} - \frac{\text{यफ}}{\text{मय}} \quad \therefore$$

$$= \frac{\text{चप मप}}{\text{मप मय}} - \frac{\text{यफ यप}}{\text{यप मय}} \quad "$$

$$= \text{ज्या क} \cdot \text{कोज्या ख} - \text{कोज्या } \angle \text{पवफ ज्या ख}$$

$$= \text{ज्या क} \cdot \text{कोज्या ख} - \text{कोज्या क} \cdot \text{ज्या ख}$$

[(1) से]

$$\therefore \text{ज्या (क - ख)} = \text{ज्या क} \cdot \text{कोज्या ख} - \text{कोज्या क} \cdot \text{ज्या ख}$$

$$\begin{aligned}
 \text{कोज्या}(क - ख) &= \text{कोज्या} \angle \text{यमठ} \\
 &= \frac{\text{मम}}{\text{मव}} \\
 &= \frac{\text{मच} + \text{चम}}{\text{मव}}
 \end{aligned}$$

परन्तु पफमच एक आंशत है ।
अतः चम = पफ

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{कोज्या}(क - ख) &= \frac{\text{मच}}{\text{मव}} + \frac{\text{पफ}}{\text{मव}} \\
 &= \frac{\text{मच}}{\text{मव}} \cdot \frac{\text{मप}}{\text{मप}} + \frac{\text{पफ}}{\text{पव}} \cdot \frac{\text{पव}}{\text{मव}} \\
 &= \text{कोज्या क} \cdot \text{कोज्या ख} + \text{ज्या} \angle \text{पफ ज्याख} \\
 &= \text{कोज्या क} \cdot \text{कोज्या ख} + \text{ज्या क} \cdot \text{ज्या ख}
 \end{aligned}$$

{(१) से

$\therefore \text{कोज्या}(क - ख) = \text{कोज्या क} \cdot \text{कोज्या ख} + \text{ज्या क} \cdot \text{ज्या ख}$
उदाहरण— अनुच्छेद ७.११ के अनुसार, बिन्ही भी महत्ताओं के कोणों के लिये, ऊपर दी हुई उपपत्ति का प्रयोग करो ।

७.३ यह सिद्ध करना है कि

$$(१) \text{ स्प}(क + ख) = \frac{\text{स्प क} + \text{स्प ख}}{१ - \text{स्प क} \cdot \text{स्प ख}}$$

$$(२) \text{ स्प } (क - ख) = \frac{\text{स्प क} - \text{स्प ख}}{१ + \text{स्प क} \cdot \text{स्प ख}}$$

पूर्व उपलब्धि के अनुसार

$$\begin{aligned} \text{स्प } (क + ख) &= \frac{\text{ज्या } (क + ख)}{\text{कोज्या } (क + ख)} \\ &= \frac{\text{ज्या क कोज्या ख} + \text{कोज्या क ज्या ख}}{\text{कोज्या क कोज्या ख} - \text{ज्या क ज्या ख}} \end{aligned}$$

अब भंश और हर को कोज्या क कोज्या ख से भाग देने पर,

$$\begin{aligned} \text{स्प } (क + ख) &= \frac{\frac{\text{ज्या क}}{\text{कोज्या क}} + \frac{\text{ज्या ख}}{\text{कोज्या ख}}}{1 - \frac{\text{ज्या क}}{\text{कोज्या क}} \times \frac{\text{ज्या ख}}{\text{कोज्या ख}}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\text{स्प क} + \text{स्प ख}}{१ - \text{स्प क} \cdot \text{स्प ख}}$$

$$\begin{aligned} \text{पुनः स्प } (क - ख) &= \frac{\text{ज्या } (क - ख)}{\text{कोज्या } (क - ख)} \\ &= \frac{\text{ज्या क कोज्या ख} - \text{कोज्या क ज्या ख}}{\text{कोज्या क कोज्या ख} + \text{ज्या क ज्या ख}} \end{aligned}$$

अब भंश और हर को कोज्या क कोज्या ख से भाग देने पर,

$$\begin{aligned}\text{स्प (क-ख)} &= \frac{\frac{\text{ज्या क}}{\text{कोज्या क}} - \frac{\text{ज्या ख}}{\text{कोज्या ख}}}{1 + \frac{\text{ज्या क}}{\text{कोज्या क}} \cdot \frac{\text{ज्या ख}}{\text{कोज्या ख}}} \\ &= \frac{\text{स्प क} - \text{स्प ख}}{1 + \text{स्प क} \cdot \text{स्प ख}}\end{aligned}$$

$$\text{अतः स्प (क+ख)} = \frac{\text{स्प क} + \text{स्प ख}}{1 - \text{स्प क} \cdot \text{स्प ख}}$$

$$\text{और स्प (क-ख)} = \frac{\text{स्प क} - \text{स्प ख}}{1 + \text{स्प क} \cdot \text{स्प ख}}$$

७.४ सिद्ध करो:—

$$\text{कोस्प (क+ख)} = \frac{\text{कोस्प क कोस्प ख} - 1}{\text{कोस्प क} + \text{कोस्प ख}}$$

$$\text{कोस्प (क+ख)} = \frac{\text{कोज्या (क+ख)}}{\text{ज्या (क+ख)}}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{\text{कोज्या क कोज्या ख} - \text{ज्या क ज्या ख}}{\text{ज्या क कोज्या ख} + \text{कोज्या क ज्या ख}}\end{aligned}$$

अंश और हर को ज्या क ज्या ख से भाग देने पर,

$$= \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot 2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{रूप } 75^\circ &= \text{रूप } (45^\circ + 30^\circ) \\ &= \frac{\text{रूप } 45^\circ + \text{रूप } 30^\circ}{1 - \text{रूप } 45^\circ \cdot \text{रूप } 30^\circ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \\ &= 2 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

75° और 15° लंब परस्पर कोण हैं अतः कोण 15° की निष्पत्तियां कोण 75° की निष्पत्तियों की सहायता से लिख सकते हैं। इसलिए

$$\text{ज्या } 15^\circ = \text{कोज्या } 75^\circ = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{कोज्या } 15^\circ = \text{ज्या } 75^\circ = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{कोज्या क कोज्या ख} &= \frac{\text{कोज्या क कोज्या ख}}{\text{ज्या क ज्या ख}} - 1 \\ \text{कोस्प (क + ख)} &= \frac{\text{कोज्या ख}}{\text{ज्या ख}} + \frac{\text{कोज्या क}}{\text{ज्या क}} \\ &= \frac{\text{कोस्प क कोस्प ख} - 1}{\text{कोस्प ख} + \text{कोस्प क}} \end{aligned}$$

इसी प्रकार,

$$\text{कोस्प (क - ख)} = \frac{\text{कोस्प क. कोस्प ख} + 1}{\text{कोस्प ख} - \text{कोस्प क}}$$

७°५ ७°५ और ११° की त्रिकोणमितीय तद्व्याप्त निकालो ।

$$\begin{aligned} \text{ज्या } ७^{\circ}५ &= \text{ज्या } (४५^{\circ} + ३०^{\circ}) \\ &= \text{ज्या } ४५^{\circ} \text{ कोज्या } ३०^{\circ} \\ &\quad + \text{कोज्या } ४५^{\circ} \text{ ज्या } ३०^{\circ} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{कोज्या } ७^{\circ}५ &= \text{कोज्या } (४५^{\circ} + ३०^{\circ}) \\ &= \text{कोज्या } ४५^{\circ} \text{ कोज्या } ३०^{\circ} \\ &\quad - \text{ज्या } ४५^{\circ} \text{ ज्या } ३०^{\circ} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}\text{स्प } 75^\circ &= \text{स्प } (45^\circ + 30^\circ) \\ &= \frac{\text{स्प } 45^\circ + \text{स्प } 30^\circ}{1 - \text{स्प } 45^\circ \text{ स्प } 30^\circ}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \\ &= 2 + \sqrt{3}\end{aligned}$$

75° और 15° लंब पूरक कोण हैं अतः कोण 15° की निष्पत्तियां कोण 75° की निष्पत्तियों की सहायता से लिख सकते हैं। इसलिए

$$\text{ज्या } 15^\circ = \text{कोज्या } 75^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{कोज्या } 15^\circ = \text{ज्या } 75^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{स्प } १५^{\circ} = \text{कोस्प } ७५^{\circ} = २ - \sqrt{३}$$

इत्यादि

१५° अर्थात् (४५°-३०°) को निष्पत्तियाँ, वियोग-प्रमेय के प्रयोग से भी निश्चित की जा सकती हैं।

उदाहरण २— योग-प्रमेय को मान कर वियोग-प्रमेय सिद्ध करो।

जैसा कि पहले सिद्ध किया जा चुका है

$$\text{ज्या } (क + ख) = \text{ज्या क कोज्या ख} + \text{कोज्या क ज्या ख}$$

$$\text{कोज्या } (क + ख) = \text{कोज्या क कोज्या ख} - \text{ज्या क ज्या ख}$$

$$\text{और स्प } (क + ख) = \frac{\text{स्प क} + \text{स्प ख}}{१ - \text{स्प क स्प ख}}$$

ऊपर के प्रत्येक सूत्र में ख के स्थान में $-\text{ख}$ रखो।

$$\text{तो, ज्या } (क - ख) = \text{ज्या क कोज्या } (-\text{ख})$$

$$+ \text{कोज्या क ज्या } (-\text{ख})$$

$$= \text{ज्या क कोज्या ख}$$

$$- \text{कोज्या क ज्या ख}$$

(अनुच्छेद ५.२ से)

$$\text{कोज्या } (क - ख) = \text{कोज्या क कोज्या } (-\text{ख})$$

$$- \text{ज्या क ज्या } (-\text{ख})$$

$$= \text{कोज्या क कोज्या ख}$$

$$+ \text{ज्या क ज्या ख}$$

$$\begin{aligned}\text{और, स्प (क-ख)} &= \frac{\text{स्प क} + \text{स्प (-ख)}}{1 - \text{स्प क स्प (-ख)}} \\ &= \frac{\text{स्पक} - \text{स्पख}}{1 + \text{स्पक-स्पख}}\end{aligned}$$

विलोम क्रमसे (conversely), इसी रीति द्वारा वियोग-प्रमेय से योग प्रमेय भी सिद्ध किया जा सकता है।

उदाहरण ३— योग और वियोग-प्रमेय की सहायता से पांचवें अध्याय का कोई भी संबंध ज्ञान किया जा सकता है।

$$\begin{aligned}\text{इस प्रकार ज्या (-अ)} &= \text{ज्या (०-अ)} \\ &= \text{ज्या } ० \cdot \text{कोज्या अ} - \text{कोज्या } ० \cdot \text{ज्या अ} \\ &\quad (\text{अनुच्छेद ७.२ से}) \\ &= ० \cdot \text{कोज्या अ} - १ \cdot \text{ज्या अ} \\ &= -\text{ज्या अ}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{पुनः; ज्या (९०° + अ)} &= \text{ज्या } ९०° \cdot \text{कोज्या अ} \\ &\quad + \text{कोज्या } ९०° \cdot \text{ज्या अ} \\ &\quad (\text{अनुच्छेद ७.१ से})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= १ \cdot \text{कोज्या अ} + ० \cdot \text{ज्या अ} \\ &= \text{कोज्या अ} \\ \text{स्प (प्या-अ)} &= \frac{\text{स्प प्या} - \text{स्प अ}}{1 + \text{स्प प्या-स्प अ}} \\ &= \frac{० - \text{स्प अ}}{1 + ० \cdot \text{स्प अ}} \\ &= -\text{स्प अ}\end{aligned}$$

कोज्या (प्या + अ) = कोज्या प्या कोज्या अ

- ज्या प्या ज्या अ

(अनुच्छेद ७.१ से)

= -१ कोज्या अ - ० ज्या अ

= -कोज्या अ

उदाहरण ४— सिद्ध करो कि

कोज्या (क + ख) कोज्या (क - ख) = कोज्या^२ क - ज्या^२ ख

और ज्या (क + ख) ज्या (क - ख) = कोज्या^२ ख - कोज्या^२ क
(अनुच्छेद ७.१ और ७.२ से)

कोज्या (क + ख) कोज्या (क - ख)

= (कोज्या क कोज्या ख - ज्या क ज्या ख) ×

(कोज्या क कोज्या ख + ज्या क ज्या ख)

= कोज्या^२ क कोज्या^२ ख - ज्या^२ क ज्या^२ ख

= कोज्या^२ क (१ - ज्या^२ ख)

- (१ - कोज्या^२ क) ज्या^२ ख

= कोज्या^२ क - ज्या^२ ख

और ज्या (क + ख) ज्या (क - ख)

= (ज्या क कोज्या ख + कोज्या क ज्या ख) ×

(ज्या क कोज्या ख - कोज्या क ज्या ख)

= ज्या^२ क कोज्या^२ ख - कोज्या^२ क ज्या^२ ख

= (१ - कोज्या^२ क) कोज्या^२ ख

- कोज्या^२ क (१ - कोज्या^२ ख)

= कोज्या^२ ख - कोज्या^२ क

उदाहरण ५— सिद्ध करो कि—

$$\frac{\cos 9^\circ + \sin 9^\circ}{\cos 9^\circ - \sin 9^\circ} = \tan 45^\circ$$

$$\tan 45^\circ = \tan (45^\circ + 9^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 9^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 9^\circ}$$

$$\therefore \frac{1 + \tan 9^\circ}{1 - \tan 9^\circ} = \frac{1 + \frac{\sin 9^\circ}{\cos 9^\circ}}{1 - \frac{\sin 9^\circ}{\cos 9^\circ}}$$

$$= \frac{\cos 9^\circ + \sin 9^\circ}{\cos 9^\circ - \sin 9^\circ}$$

प्रश्नावलि ९.

(१) यदि $\sin A = \frac{4}{12}$ व $\cos A = \frac{8}{9}$ हो तो

$\sin(A+B)$, $\cos(A-B)$ और $\tan(A-B)$ की अर्थात् निकालो।

(२) यदि $\sin A = \frac{4}{9}$ और $\sin B = \frac{1}{12}$ हो तो सिद्ध करो

$$\text{कि, } (\sin A + \sin B) = \frac{13}{18}$$

(३) यदि $\sin A = \frac{1}{8}$ और $\sin B = \frac{3}{4}$ हो तो $(\sin A + \sin B)$ की अर्थात् निकालो।

सिद्ध करो—

$$(४) \text{ ज्या } (६०^\circ - अ) \text{ कोज्या } (३०^\circ - आ) \\ + \text{ कोज्या } (६०^\circ - अ) \text{ ज्या } (३०^\circ - आ) \\ = \text{ कोज्या } (अ + आ)$$

$$(५) \text{ कोज्या } (८०^\circ + अ) \text{ कोज्या } (८०^\circ - अ) \\ + \text{ ज्या } (८०^\circ + अ) \text{ ज्या } (८०^\circ - अ) = \text{ कोज्या } २ अ$$

$$(६) \text{ कोज्या } ७५^\circ + \text{ ज्या } १०^\circ = \text{ ज्या } ७५^\circ - \text{ कोज्या } १०^\circ$$

$$(७) \frac{\text{ज्या } (क - ख)}{\text{ज्या क} \cdot \text{ज्या ख}} + \frac{\text{ज्या } (ख - ग)}{\text{ज्या ख} \cdot \text{ज्या ग}} \\ + \frac{\text{ज्या } (ग - क)}{\text{ज्या ग} \cdot \text{ज्या क}} = ०$$

$$(८) \left\{ \text{ज्या } (अ + आ) \text{ कोज्या } इ - \text{ कोज्या } (आ + इ) \text{ ज्या } अ \right\} \\ = \text{ ज्या } आ \text{ कोज्या } (इ - अ)$$

$$(९) \text{ कोस्प क} - \text{ कोस्प } २ क = \text{ व्युज्या } २ क \\ [\text{कलकत्ता } १८७०]$$

$$(१०) १ + \text{स्प अ स्प } २ अ - \text{ व्युत्कोज्या } २ अ = ० \\ [\text{कलकत्ता } १८७७]$$

$$(११) \frac{१ + \text{स्प क कोस्प ख}}{\text{कोस्प ख} - \text{स्प क}} = \text{स्प } (क + ख)$$

$$(१२) \text{ स्प } \frac{\text{प्या}}{४} + \text{स्प } \frac{\text{प्या}}{६} \text{ स्प } \frac{\text{प्या}}{१२} = \sqrt{१ + \text{स्प }^२ \frac{\text{प्या}}{६}}$$

$$(१३) \text{ स्प } \left(\frac{\text{प्या}}{४} + अ \right) \text{ स्प } \left(\frac{\text{प्या}}{४} - अ \right) \\ + \text{ कोस्प } \left(\frac{\text{प्या}}{४} + अ \right) \text{ कोस्प } \left(\frac{३\text{प्या}}{४} + अ \right) = ०$$

$$(१४) \quad \text{स्प } ५०^\circ + \text{स्प } १०^\circ + \sqrt{३} \text{ स्प } ५०^\circ \cdot \text{स्प } १०^\circ = \sqrt{३} ,$$

$$(१५) \quad \text{स्प } (४५^\circ + क) \text{ स्प } (४५^\circ - क) = १$$

$$(१६) \quad \text{यदि स्प ख} = \frac{\text{स ज्या क} \cdot \text{कोज्या क}}{१ - \text{स ज्या}^२ \text{ क}} \text{ हो तो दिखाओ}$$

$$\text{कि, स्प } (क - ख) = (१ - स) \text{ स्प क} \quad [\text{पटना १९४१}]$$

(१७) सिद्ध करो कि क की किसी भी अर्धा के लिये,

$$\frac{\text{कोस्प क}}{१ + \text{कोस्प क}} \cdot \frac{\text{कोस्प } (४५^\circ - क)}{१ + \text{कोस्प } (४५^\circ - क)} \text{ की अर्धा सदा अपरिवर्ती रहती है।} \quad [\text{पटना १९४२}]$$

(१८) यदि कोण क के ऐसे दो भाग किये जाएं कि उन दो भागों की स्पर्शज्याओं की निष्पत्ति 'न' हो और उन दोनों भागों का अन्तर य हो तो दिखाओ कि,

$$\text{ज्या य} = \frac{\text{न} - १}{\text{न} + १} \text{ ज्या क} \quad [\text{इलाहाबाद १९४५}]$$

७.६ गुणनफलों का, योग और वियोग-फलों में रूपान्तरण—

अनुच्छेद ७.१ और ७.२ से,

$$\text{ज्या } (क + ख) = \text{ज्या क कोज्या ख}$$

$$+ \text{कोज्या क ज्या ख} \dots (अ)$$

$$\text{ज्या } (क - ख) = \text{ज्या क कोज्या ख}$$

$$- \text{कोज्या क ज्या ख} \dots (आ)$$

कोज्या (क + ख) = कोज्या क कोज्या ख
 - ज्या क ज्या ख ... (६)

कोज्या (क - ख) = कोज्या क कोज्या ख
 + ज्या क ज्या ख ... (६)

(अ) और (आ) के योग से,
 ज्या (क + ख) + ज्या (क - ख)
 = २ज्या क कोज्या ख ... (१)

(अ) से (आ) के वियोग से,
 ज्या (क + ख) - ज्या (क - ख)
 = २कोज्या क ज्या ख ... (२)

(इ) और (ई) के योग से,
 कोज्या (क - ख) + कोज्या (क + ख)
 = २कोज्या क कोज्या ख ... (३)

(ई) से (इ) के वियोग से,
 कोज्या (क - ख) - कोज्या (क + ख)
 = २ज्या क ज्या ख ... (४)

ऊपर दिये चार सूत्र अब इस प्रकार लिखे जायेंगे ।

२ज्या क कोज्या ख = ज्या (क + ख)
 + ज्या (क - ख) ... (५)

२कोज्या क ज्या ख = ज्या (क + ख)
 - ज्या (क - ख) ... (६)

$$२कोज्या क कोज्या ख = कोज्या (क + ख) \\ + कोज्या (क - ख) \dots (७)$$

$$२ज्या क ज्या ख = कोज्या (क - ख) \\ - कोज्या (क + ख) \dots (८)$$

(५) से (८) तक के चार सूत्र दो ज्याओं और कोटिज्याओं के गुणनफल को दो ज्याओं अथवा दो कोटिज्याओं के योग और वियोग में रूपांतरित करते हैं।

७.७ योग अथवा वियोग-फलों का गुणनफलों में रूपांतरण।

$$\text{मान लो } (क + ख) = ग \text{ और } (क - ख) = घ$$

$$\text{तो, } क = \frac{ग + घ}{२} \text{ और } ख = \frac{ग - घ}{२}$$

अनुच्छेद ७.६ के सूत्र (१), (२), (३) और (४) में क और ख के स्थान में, उनकी ऊपर दी गई अर्थाओं का आदेश करने से और सूत्र (४) को इस प्रकार लिखने से

$$कोज्या(क + ख) - कोज्या(क - ख) = -२ ज्या क ज्या ख \\ = २ज्या क ज्या (-ख)$$

चार नये सूत्र प्राप्त होते हैं। ये सूत्र दो ज्याओं, अथवा दो कोज्याओं के योग अथवा वियोग की ज्याओं और कोज्याओं के गुणन-फल के रूप में व्यक्त करते हैं।

ये सूत्र नीचे दिए गए हैं ।

$$\text{ज्या ग} + \text{ज्या घ} = २\text{ज्या } \frac{\text{ग} + \text{घ}}{२} \quad \text{कोज्या } \frac{\text{ग} - \text{घ}}{२} \quad \dots (१)$$

$$\text{ज्या ग} - \text{ज्या घ} = २\text{कोज्या } \frac{\text{ग} + \text{घ}}{२} \quad \text{ज्या } \frac{\text{ग} - \text{घ}}{२} \quad \dots (२)$$

$$\text{कोज्या ग} + \text{कोज्या घ} = २\text{कोज्या } \frac{\text{ग} + \text{घ}}{२} \quad \text{कोज्या } \frac{\text{ग} - \text{घ}}{२} \quad \dots (३)$$

$$\text{कोज्या ग} - \text{कोज्या घ} = २\text{ज्या } \frac{\text{ग} + \text{घ}}{२} \quad \text{ज्या } \frac{\text{घ} - \text{ग}}{२} \quad \dots (४)$$

इन्हें गुणन-सूत्र कहते हैं ।

७८ दत्त ज्या वाले सव कोणों की सामान्य अर्धा निकालो ।

मान लो दत्त ज्या वाला लघुतम धन कोण इ है और उसी ज्या वाला एक दूसरा कोण अ है ।

तो अ व अ को यह सामान्य अर्धा निकालना है जो निम्न-लिखित समीकार का समाधान कर सके—

$$\text{ज्या अ} = \text{ज्या इ}$$

$$\text{अथवा, ज्या अ} - \text{ज्या इ} = ०$$

∴ अनुच्छेद ७७ के सूत्र (२) से,
 $२ज्या \frac{अ-इ}{२} कोज्या \frac{अ+इ}{२} = ०$

अतः या तो ज्या $\frac{अ-इ}{२} = ०$ (१)

अथवा कोज्या $\frac{अ+इ}{२} = ०$ (२)

(१) से, $\frac{१}{२} (अ-इ) =$ ज्या का कोई अपवर्त्य
 $=$ घ ज्या.

∴ $अ = २ घ ज्या + इ$ (क)

(२) से, $\frac{अ+इ}{२} = \frac{ज्या}{२}$ का कोई अयुग्म अपवर्त्य
 $= (२ घ + १) \frac{ज्या}{२}$

∴ $अ = -इ + (२घ + १) ज्या$ (ख)

यदि स शून्य अथवा घन अथवा ऋण कोई पूर्णांक हो तो (क) और (ख) दोनों अर्थात् $अ = स ज्या + (-१)^n इ$ पद-संहति में समाविष्ट होती हैं ।

इसी प्रकार दत्त कोटिज्या अथवा दत्त स्पर्शज्या वाले सब कोणों के लिए भी सामान्य पदसंहतियां निर्दिष्ट की जा सकती हैं।

७.२ उदाहरण १— सिद्ध करो कि—

$$२ज्या \frac{प्या}{११} - ज्या \frac{७ प्या}{११} + ज्या \frac{प्या}{२२} - ज्या \frac{५ प्या}{२२} = ०$$

अनुच्छेद ७.८ के सूत्र (८) से,

$$२ज्या \frac{प्या}{११} ज्या \frac{७ प्या}{११} = कोज्या \frac{६ प्या}{११} - कोज्या \frac{८ प्या}{११}$$

$$\text{परंतु कोज्या } \frac{६ प्या}{११} = कोज्या \left(\frac{प्या}{२} + \frac{प्या}{२२} \right)$$

$$\therefore = -ज्या \frac{प्या}{२२}$$

$$\text{और कोज्या } \frac{८ प्या}{११} = ज्या \left(\frac{प्या}{२} - \frac{८ प्या}{११} \right)$$

$$= ज्या \left(-\frac{५ प्या}{२२} \right)$$

$$= -ज्या \frac{५ प्या}{२२}$$

$$\text{इसलिए, } २ज्या \frac{प्या}{११} - ज्या \frac{७ प्या}{११} = -ज्या \frac{प्या}{२२} + ज्या \frac{५ प्या}{२२}$$

$$\text{अथवा, } २ज्या \frac{प्या}{११} \cdot ज्या \frac{७प्या}{११} + ज्या \frac{प्या}{२२} - ज्या \frac{५प्या}{२२} = ०$$

उदाहरण २— सरल करो—

$$\frac{ज्या अ + ज्या २ अ + ज्या ३ अ + ज्या ४ अ}{कोज्या अ + कोज्या २ अ + कोज्या ३ अ + कोज्या ४ अ}$$

$$\text{अंश} = (ज्या अ + ज्या ४ अ) + (ज्या २ अ + ज्या ३ अ)$$

$$= २ज्या \frac{५अ}{२} कोज्या \frac{३अ}{२} + २ज्या \frac{५अ}{२} कोज्या \frac{अ}{२}$$

(अनुच्छेद ७-७ से)

$$= २ज्या \frac{५अ}{२} \left(कोज्या \frac{३अ}{२} + कोज्या \frac{अ}{२} \right)$$

$$\text{हर} = (कोज्या अ + कोज्या ४अ) + (कोज्या २अ + कोज्या ३अ)$$

$$= २कोज्या \frac{५अ}{२} कोज्या \frac{३अ}{२} + २कोज्या \frac{५अ}{२} कोज्या \frac{अ}{२}$$

(अनुच्छेद ७-७ से)

$$= २कोज्या \frac{५अ}{२} \left(कोज्या \frac{३अ}{२} + कोज्या \frac{अ}{२} \right)$$

∴ दत्त पदसंहति

$$२ज्या \frac{५अ}{२} \left(कोज्या \frac{३अ}{२} + कोज्या \frac{अ}{२} \right)$$

$$= \frac{२कोज्या \frac{५अ}{२} \left(कोज्या \frac{३अ}{२} + कोज्या \frac{अ}{२} \right)}{२कोज्या \frac{५अ}{२} \left(कोज्या \frac{३अ}{२} + कोज्या \frac{अ}{२} \right)}$$

$$= \frac{५अ}{२}$$

प्रश्नावलि १०

(१) यदि ज्या क = $\frac{१}{\sqrt{२}}$ और ज्या ख = $\frac{१}{\sqrt{३}}$ तो

स्प $\left(\frac{क+ख}{२}\right) \cdot कोस्प\left(\frac{क-ख}{२}\right)$ की अर्धा निश्चित

करो ।

[कलकत्ता १८७५]

सिद्ध करो—

$$(२) \frac{\text{कोज्या } २क - \text{कोज्या } ४क}{\text{ज्या } ४क - \text{ज्या } २क} = \text{स्प } ३क$$

[कलकत्ता १८९३]

$$(३) \frac{\text{ज्या क} + \text{ज्या ख}}{\text{कोज्या क} + \text{कोज्या ख}} = \text{स्प } \frac{क+ख}{२}$$

[कलकत्ता १८७३]

$$(४) \begin{aligned} &\text{कोज्या क} + \text{कोज्या } (१२०^\circ + क) \\ &\quad + \text{कोज्या } (१२०^\circ - क) = ० \end{aligned}$$

[कलकत्ता १९१७]

$$(५) \frac{\text{ज्या } ३अ - २\text{ज्या } ७अ + \text{ज्या } ११अ}{\text{कोज्या } ३अ - २\text{कोज्या } ७अ + \text{कोज्या } ११अ} = \text{स्प } ७अ$$

$$(६) \quad \text{कोज्या २क} + \text{कोज्या ४क} + \text{कोज्या ६क} + \text{कोज्या ८क} \\ = \text{४कोज्या क} \cdot \text{कोज्या २क} \cdot \text{कोज्या ५क} \\ \text{[कलकत्ता १८८७]}$$

$$(७) \quad \text{ज्या } १०^{\circ} + \text{ज्या } २०^{\circ} + \text{ज्या } ४०^{\circ} + \text{ज्या } ५०^{\circ} \\ = \text{ज्या } ७०^{\circ} + \text{ज्या } ८०^{\circ}$$

$$(८) \quad \text{कोज्या } ५५^{\circ} + \text{कोज्या } ६५^{\circ} + \text{कोज्या } १७५^{\circ} = ० \\ \text{[कलकत्ता १८७६]}$$

$$(९) \quad \text{स्प } ७०^{\circ} = २ \text{ स्प } ५०^{\circ} + \text{स्प } २०^{\circ} \quad \text{[यनारस १९४४]}$$

$$(१०) \quad \text{ज्या } २०^{\circ} \cdot \text{ज्या } ४०^{\circ} \cdot \text{ज्या } ६०^{\circ} \cdot \text{ज्या } ८०^{\circ} = \frac{३}{१६} \\ \text{[नागपुर १९३६]}$$

$$(११) \quad \text{कोज्या } १५^{\circ} - \text{ज्या } १५^{\circ} = \frac{१}{\sqrt{२}} \quad \text{[यनारस १९३८]}$$

$$(१२) \quad \text{स्प } \frac{\text{क} + \text{ख}}{२} + \text{स्प } \frac{\text{क} - \text{ख}}{२} = \frac{२ \text{ ज्या क}}{\text{कोज्या क} + \text{कोज्या ख}} \\ \text{[यनारस १९३९]}$$

$$(१३) \quad \text{यदि व्युज्या क} + \text{व्युत्कोज्या क} \\ = \text{व्युज्या ख} + \text{व्युत्कोज्या ख} \quad \text{तो दिखाओ कि}$$

$$\text{स्पक} \cdot \text{स्पख} = \text{कोस्प } \left(\frac{\text{क} + \text{ख}}{२} \right)$$

[पटना १९३६]

(१४) यदि, $\frac{\text{स्प अ}}{\text{य}} = \frac{\text{स्प आ}}{\text{र}} = \frac{\text{स्प इ}}{\text{ल}}$ हो तो सिद्ध करो कि

$$\left(\frac{\text{र} + \text{ल}}{\text{र} - \text{ल}}\right) \text{ज्या}^2 (\text{आ} - \text{इ}) + \left(\frac{\text{ल} + \text{य}}{\text{ल} - \text{य}}\right) \text{ज्या}^2 (\text{इ} - \text{अ})$$

$$+ \left(\frac{\text{य} + \text{र}}{\text{य} - \text{र}}\right) \text{ज्या}^2 (\text{अ} - \text{आ}) = 0$$

[घनारस १९२७]

(१५) सिद्ध करो—

$$\frac{\text{ज्या} ११ \text{क} \cdot \text{ज्या} \text{क} + \text{ज्या} ७ \text{र} \cdot \text{ज्या} ३ \text{क}}{\text{कोज्या} ११ \text{क} \cdot \text{ज्या} \text{क} + \text{कोज्या} ७ \text{र} \cdot \text{ज्या} ३ \text{क}} = \text{स्प } ८ \text{ क}$$

[पंजाब १९१२]

(१६) कोज्या २ अ · कोज्या $\frac{\text{अ}}{२}$ — कोज्या अ · कोज्या $\frac{७ \text{ अ}}{२}$

$$= \text{ज्या } ३ \text{ अ} \cdot \text{ज्या } \frac{३ \text{ अ}}{२}$$

(१७) ज्या $\frac{१२ \text{ अ}}{४}$ ज्या $\frac{\text{अ}}{४}$ + ज्या $\frac{७ \text{ अ}}{४}$ ज्या $\frac{३ \text{ अ}}{४}$

$$= \text{ज्या } २ \text{ अ} \cdot \text{ज्या } \text{अ}$$

[कलकत्ता १९०४]

(१८) ज्या $\frac{\text{क} - \text{ख} - \text{ग}}{२}$ ज्या $\frac{\text{ख} - \text{ग}}{२}$

$$+ \text{ज्या } \frac{\text{ख} + \text{क} - \text{ग}}{२} \text{ ज्या } \frac{\text{ख} + \text{ग}}{२} = \text{ज्या } \text{ख} \cdot \text{ज्या } \frac{\text{क}}{२}$$

[कलकत्ता १८८५]

आठवां अध्याय

अपवर्त्य और अपवर्तक कोणों की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियाँ

अपवर्त्य (multiple) कोण

८.१ कोण 2α की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को α की निष्पत्तियों के पदों में निकालना।

अनुच्छेद ७.१ के सूत्र में यदि $x = k$ लिखा जाय तो,
 $\cos 2\alpha = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha$
 $= 2 \cos \alpha \cdot \cos \alpha - 1 \dots \dots \dots (१)$

$\cos 2\alpha = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha$
 $= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

$$\begin{aligned} \text{अथ } \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) \\ &= 2\cos^2 \alpha - 1 \\ &= 2(1 - \sin^2 \alpha) - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{इसलिए } \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= 2\cos^2 \alpha - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 \alpha \dots \dots \dots (२) \end{aligned}$$

$$\text{पुनः, स्प २ क} = \frac{\text{ज्या २ क}}{\text{कोज्या २ क}}$$

$$= \frac{२ \text{ ज्या क} \cdot \text{कोज्या क}}{\text{कोज्या}^२ \text{ क} - \text{ज्या}^२ \text{ क}}$$

अंश और हर दोनों को कोज्या^२क से भाग देने पर,

$$\text{स्प २ क} = \frac{२ \text{ स्प क}}{१ - \text{स्प}^२ \text{ क}} \dots\dots \dots (३)$$

अनुच्छेद ७३ के सूत्र (१) में यदि ए = क लिखा जाय तो भी सूत्र (३) प्राप्त हो सकता है।

$$\text{इस प्रकार स्प २ क} = \frac{\text{स्प क} + \text{स्प क}}{१ - \text{स्प क} \cdot \text{स्प क}}$$

$$= \frac{२ \text{ स्प क}}{१ - \text{स्प}^२ \text{ क}}$$

उपप्रमेय— सूत्र (२) से

$$१ + \text{कोज्या २ क} = २ \text{ कोज्या}^२ \text{ क}$$

$$\text{और, } १ - \text{कोज्या २ क} = २ \text{ ज्या}^२ \text{ क}$$

८२ कोण ३क की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को क की निष्पत्तियों के पदों में निकालना।

$$\begin{aligned}
 \text{ज्या रेक} &= \text{ज्या } (2क + क) \\
 &= \text{ज्या } 2क \cdot \text{कोज्या } क + \text{कोज्या } 2क \cdot \text{ज्या } क \\
 &= 2\text{ज्या } क \cdot \text{कोज्या } क - \text{कोज्या } क \\
 &\quad + (\text{कोज्या}^2 क - \text{ज्या}^2 क) \text{ ज्या } क \\
 &= 2\text{ज्या } क \cdot \text{कोज्या}^2 क - \text{ज्या}^2 क \\
 &= 2\text{ज्या } क (1 - \text{ज्या}^2 क) - \text{ज्या}^2 क \\
 &= 2\text{ज्या } क - 4\text{ज्या}^3 क
 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{ज्या रेक} = 2\text{ज्या } क - 4\text{ज्या}^3 क \quad \dots\dots\dots (४)$$

$$\begin{aligned}
 \text{कोज्या रेक} &= \text{कोज्या } (2क + क) \\
 &= \text{कोज्या } 2क \cdot \text{कोज्या } क - \text{ज्या } 2क \cdot \text{ज्या } क \\
 &= (2\text{कोज्या}^2 क - 1) \text{ कोज्या } क \\
 &\quad - 2\text{ज्या } क \cdot \text{कोज्या } क \cdot \text{ज्या } क \\
 &= 2\text{कोज्या}^3 क - \text{कोज्या } क \\
 &\quad - 2\text{कोज्या } क (1 - \text{कोज्या}^2 क)
 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{कोज्या रेक} = 4\text{कोज्या}^3 क - 3\text{कोज्या } क \quad \dots\dots (५)$$

$$\begin{aligned}
 \text{स्प रे क} &= \text{स्प } (2क + क) = \frac{\text{स्प } 2क + \text{स्प } क}{1 - \text{स्प } 2क \cdot \text{स्प } क} \\
 &= \frac{\frac{2\text{स्प } क}{1 - \text{स्प}^2 क} + \text{स्प } क}{1 - \frac{2\text{स्प } क}{1 - \text{स्प}^2 क} \cdot \text{स्प } क} \\
 &= \frac{2\text{स्प } क + (1 - \text{स्प}^2 क) \text{ स्प } क}{1 - \text{स्प}^2 क - 2\text{स्प } क \cdot \text{स्प } क}
 \end{aligned}$$

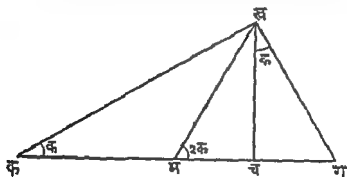
$$\therefore \sin 3\theta = \frac{3 \sin \theta - \sin^3 \theta}{1 - 3 \sin^2 \theta} \quad \dots\dots(6)$$

यह स्पष्ट है कि सूत्र (४) और (५) को इस रूप में लिख सकते हैं।

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta (3 \sin^2 \theta - \sin^4 \theta)$$

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta (1 - 3 \sin^2 \theta)$$

८.३ २क की निष्पत्तियाँ रेखिकीय विधि से निकालना।



आ. ८.१

मान लो $\angle MKN = \theta$ । कग रेखा के किसी बिंदु म को केंद्र मानकर, मक त्रिज्या का वृत्त खींचो, जो कग और कग का क्रमशः स और ग में छेदन करे। मव और गख को मिलाओ और कग रेखा पर खच लें। खींचो,

$$\text{तो, } \angle K = \angle M = \angle G,$$

$$\angle KMG = 2\theta$$

$$\angle KMG = 90^\circ$$

$$\text{और } \angle GKM = 90^\circ - \angle KMG = \theta$$

$$\therefore \text{ज्या रक} = \text{ज्या खमच} = \frac{\text{खच}}{\text{मख}} = \frac{२\text{खच}}{२\text{मख}} = \frac{२\text{खच}}{\text{कग}}$$

$$= २ \frac{\text{खच}}{\text{खक}} \cdot \frac{\text{खक}}{\text{कग}} = २ \text{ज्या क} \cdot \text{कोज्या क}$$

$$\text{होज्या रक} = \frac{\text{मच}}{\text{मय}} = \frac{२\text{मच}}{२\text{मख}} = \frac{\text{कच} - \text{चग}}{\text{कग}}$$

$$(\therefore २\text{मच} = \text{कच} - \text{चग})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\text{कच}}{\text{कग}} - \frac{\text{चग}}{\text{कग}} = \frac{\text{कच}}{\text{कख}} \cdot \frac{\text{कख}}{\text{कग}} - \frac{\text{चग}}{\text{खग}} \cdot \frac{\text{खग}}{\text{कग}} \\ &= \text{कोज्या क} \cdot \text{कोज्या क} - \text{ज्या क} \cdot \text{ज्या क} \\ &= \text{कोज्या}^2 \text{क} - \text{ज्या}^2 \text{क} \end{aligned}$$

$$\text{स्प रक} = \frac{\text{खच}}{\text{मच}} = \frac{२\text{खच}}{२\text{मच}} = \frac{२\text{खच}}{\text{कच} - \text{चग}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{२\text{खच}}{\text{कच}}}{१ - \frac{\text{चग}}{\text{कच}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{२\text{खच}}{\text{कच}}}{१ - \left(\frac{\text{चग}}{\text{कख}}\right) \left(\frac{\text{चख}}{\text{कच}}\right)} \end{aligned}$$

$$= \frac{२ \text{स्प क}}{१ - \text{स्प}^2 \text{क}}$$

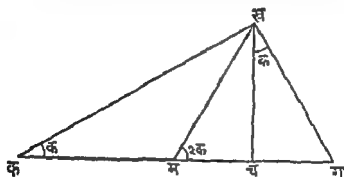
$$\therefore \text{स्व } ३ \text{ क} = \frac{३ \text{ स्व क} - \text{स्व}^३ \text{ क}}{१ - ३ \text{ स्व}^२ \text{ क}} \quad \dots\dots(६)$$

यह स्पष्ट है कि सूत्र (४) और (५) को इस रूप में लिख सकते हैं।

$$\text{ज्या } ३ \text{ क} = \text{कोज्या}^३ \text{ क} (३ \text{ स्व क} - \text{स्व}^३ \text{ क})$$

$$\text{कोज्या } ३ \text{ क} = \text{कोज्या}^३ \text{ क} (१ - ३ \text{ स्व}^२ \text{ क})$$

८.३ २क की निष्पत्तियां त्रैजिकीय विधि से निकालना।



आ. ८.१

मान लो $\angle \text{मकग} = \text{क}$ । कग रेखा के किसी बिंदु म को केंद्र मानकर, मक त्रिज्या का वृत्त खींचो, जो कव और वग का क्रमशः ख और ग में छेदन करे। मव और गख को मिलाओ और कग रेखा पर खच लंब खींचो,

तो, $\text{मक} = \text{मव} = \text{मग}$;

$$\angle \text{खमग} = २\text{क}$$

$$\angle \text{कखग} = ९०^\circ$$

$$\text{और } \angle \text{चखग} = ९०^\circ - \angle \text{खगच} = \text{क}$$

$$\therefore \text{ज्या रक} = \text{ज्या खमच} = \frac{\text{खच}}{\text{मख}} = \frac{२\text{खच}}{२\text{मक}} = \frac{२\text{खच}}{\text{कग}}$$

$$= २ \frac{\text{खच}}{\text{खक}} \cdot \frac{\text{खक}}{\text{कग}} = २ \text{ज्या क को ज्या क}$$

$$\text{होज्या रक} = \frac{\text{मच}}{\text{मय}} = \frac{२\text{मच}}{२\text{मख}} = \frac{\text{कच} - \text{चग}}{\text{कग}}$$

$$(\therefore २\text{मच} = \text{कच} - \text{चग})$$

$$= \frac{\text{कच}}{\text{कग}} - \frac{\text{चग}}{\text{कग}} = \frac{\text{कच}}{\text{कख}} \cdot \frac{\text{कख}}{\text{कग}} - \frac{\text{चग}}{\text{खग}} \cdot \frac{\text{खग}}{\text{कग}}$$

$$= \text{को ज्या क को ज्या क} - \text{ज्या क ज्या क}$$

$$= \text{को ज्या क} - \text{ज्या क}$$

$$\text{स्प र क} = \frac{\text{खच}}{\text{मच}} = \frac{२\text{खच}}{२\text{मच}} = \frac{२\text{खच}}{\text{कच} - \text{चग}}$$

$$= \frac{\frac{२\text{खच}}{\text{कच}}}{१ - \frac{\text{चग}}{\text{कच}}}$$

$$= \frac{\frac{२\text{खच}}{\text{कच}}}{१ - \left(\frac{\text{चग}}{\text{कख}}\right) \left(\frac{\text{खख}}{\text{कच}}\right)}$$

$$= \frac{२ \text{स्प क}}{१ - \text{स्प}^२ \text{क}}$$

८.३१ उदाहरण १— ज्या ५अ को ज्या अ के पदों में व्यक्त करो ।

ज्या ५अ

$$= ज्या (३ अ + २ अ)$$

$$= ज्या ३ अ \cdot कोज्या २ अ + कोज्या ३ अ \cdot ज्या २ अ$$

$$= (३ ज्या अ - ४ ज्या^३ अ) (१ - २ ज्या^२ अ)$$

$$+ (४ कोज्या^३ अ - ३ कोज्या अ) २ ज्या अ \cdot कोज्या अ$$

$$= (३ ज्या अ - १० ज्या^३ अ + ८ ज्या^५ अ)$$

$$+ २ ज्या अ \cdot कोज्या^२ अ (४ काज्या^२ अ - ३)$$

$$= (३ ज्या अ - १० ज्या^३ अ + ८ ज्या^५ अ)$$

$$+ २ ज्या अ (१ - ज्या^२ अ) (१ - ४ ज्या^२ अ)$$

$$= (३ ज्या अ - १० ज्या^३ अ + ८ ज्या^५ अ)$$

$$+ २ ज्या अ (१ - ५ ज्या^२ अ + ४ ज्या^४ अ)$$

$$= ५ ज्या अ - २० ज्या^३ अ + १६ ज्या^५ अ$$

उदाहरण २— सिद्ध करो कि

$$\frac{१ + ज्या २ अ - कोज्या २ अ}{१ + ज्या २ अ + कोज्या २ अ} = \frac{२ अ}{१ + ज्या २ अ + कोज्या २ अ}$$

[कालकत्ता १.२.३८]

$$\begin{aligned} \text{यामपक्ष} &= \frac{(१ - कोज्या २ अ) + ज्या २ अ}{(१ + कोज्या २ अ) + ज्या २ अ} \\ &= \frac{२ ज्या^२ अ + २ ज्या अ \cdot कोज्या अ}{२ कोज्या^२ अ + २ ज्या अ \cdot कोज्या अ} \\ &= \frac{२ ज्या अ (ज्या अ + कोज्या अ)}{२ कोज्या अ (कोज्या अ + ज्या अ)} \\ &= \frac{ज्या अ}{कोज्या अ} = \frac{२ अ}{१ + ज्या २ अ + कोज्या २ अ} = \text{दक्षिण पक्ष} \end{aligned}$$

उदाहरण— सिद्ध करो कि

$$\frac{\text{व्युत्क्राज्या ८क} - १}{\text{व्युत्क्राज्या ४क} - १} = \frac{\text{स्प ८क}}{\text{स्प २क}}$$

$$\text{वामपक्ष} = \frac{\frac{१}{\text{क्राज्या ८क}} - १}{\frac{१}{\text{क्राज्या ४क}} - १}$$

$$= \frac{\text{क्राज्या ४क} \cdot १ - \text{क्राज्या ८क}}{\text{क्राज्या ८क} \cdot १ - \text{क्राज्या ४क}}$$

$$= \frac{\text{क्राज्या ४क} \cdot २ \text{ ज्या } ४क}{\text{क्राज्या ८क} \cdot २ \text{ ज्या } २क}$$

$$= \frac{२ \text{ ज्या } ४क \cdot \text{क्राज्या ४क} \cdot \text{ज्या ४क}}{\text{क्राज्या ८क} \cdot २ \text{ ज्या } २क}$$

$$= \frac{\text{ज्या ८क} \cdot २ \text{ ज्या } २क \cdot \text{क्राज्या २क}}{\text{क्राज्या ८क} \cdot २ \text{ ज्या } २क}$$

$$= \text{स्प ८क} \cdot \frac{\text{क्राज्या २क}}{\text{ज्या २क}}$$

$$= \frac{\text{स्प ८क}}{\text{स्प २क}} = \text{दक्षिणपक्ष}$$

प्रश्नावलि ११

(१) स्पष्टक को स्पष्टक के पदों में व्यक्त करो

सिद्ध करो—

[कलकत्ता १८९८]

$$(२) \frac{\text{ज्या } २ क}{१ - \text{कोज्या } २ क} = \text{कोस्प क}$$

$$(३) \text{स्प क} + \text{कोस्प क} = २ \text{ व्युज्ज्या } २ क$$

[कलकत्ता १९१८]

$$(४) \frac{\text{कोज्या } २ अ}{१ + \text{ज्या } २ अ} = \text{स्प } (४५^{\circ} - अ) = \frac{१ - \text{ज्या } २ अ}{\text{कोज्या } २ अ}$$

$$(५) \text{कोज्या}^२ क + \text{कोज्या}^२ (६०^{\circ} + क)$$

$$+ \text{कोज्या}^२ (६०^{\circ} - क) = \frac{३}{२}$$

$$(६) \text{कोस्प क} + \text{कोस्प } (६०^{\circ} + क) + \text{कोस्प } (१२०^{\circ} + क)$$

$$= ३ \text{ कोस्प } ३ क$$

[पटना १९४५]

$$(७) \frac{१ - \text{स्प}^२ (४५^{\circ} - अ)}{१ + \text{स्प}^२ (४५^{\circ} - अ)} = \text{ज्या } २ अ$$

$$(८) \frac{२ \text{ ज्या अ}}{\text{ज्या } ३ अ} + \frac{\text{स्प अ}}{\text{स्प } ३ अ} = १$$

[धनद १८९६]

$$(९) \text{ज्या } ६ क = ४ \text{ ज्या } २ क \cdot \text{ज्या } (६०^{\circ} + २ क) \times$$

$$\text{ज्या } (६०^{\circ} - २ क)$$

[कलकत्ता १८७३]

$$(१०) \text{ज्या } (२स + १) य \cdot \text{ज्या य} = \text{ज्या}^२ (स + १) य - \text{ज्या}^२ स य$$

(११) यदि २स्व अ = ३ स्व आ, तो यह दिखाओ कि

$$\text{स्व (अ - आ)} = \frac{\text{ज्या २ आ}}{५ - \text{कोज्या २ आ}} \quad [\text{कलकत्ता १९४६}]$$

सिद्ध करो—

(१२) $४ (\text{कोज्या}^३ \text{क ज्या}^३ \text{क} + \text{ज्या}^३ \text{क कोज्या}^३ \text{क}) = ३ \text{ज्या}^४ \text{क}$
 [बनारस १९३५]

(१३) $\text{कोज्या}^३ \text{क कोज्या}^३ \text{क} + \text{ज्या}^३ \text{क ज्या}^३ \text{क} = \text{कोज्या}^३ \text{क}$
 [पटना १९४३]

(१४) $\text{ज्या}^३ \text{क} + \text{ज्या}^३ (१२०^\circ + \text{क}) + \text{ज्या}^३ (२४०^\circ + \text{क})$
 $= -\frac{३}{४} \text{ज्या}^३ \text{क} \quad [\text{पटना १९३७}]$

(१५) $\text{स्व}^३ \text{क}, \text{स्व}^२ \text{क}, \text{स्व क} = \text{स्व}^३ \text{क} - \text{स्व}^२ \text{क} - \text{स्व क}$
 [पटना १९३७]

अपवर्तक (submultiple) कोण

८.४ निम्न लिखित अपवर्त्य कोणों के सूत्र अ की सव
 अर्हाओं के लिए सत्य हैं।

$\text{ज्या}^२ \text{क} = २ \text{ज्या क कोज्या क}$
 $\text{कोज्या}^२ \text{क} = \text{कोज्या}^२ \text{क} - \text{ज्या}^२ \text{क} = २ \text{कोज्या}^२ \text{क} - १$
 $= १ - २ \text{ज्या}^२ \text{क}$

और $\text{स्व}^२ \text{क} = \frac{२ \text{स्व क}}{१ - \text{स्व}^२ \text{क}}$

इसलिए यदि २ क के स्थान पर क और क के स्थान
 पर $\frac{\text{क}}{२}$ लिखा जाय, तो भी वे सत्य होंगे।

इस प्रकार निम्न लिखित सूत्र अपवर्तक कोणों के लिए प्राप्त होते हैं।

$$\text{ज्या } k = 2 \text{ ज्या } \frac{k}{2} \cdot \text{कोज्या } \frac{k}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{कोज्या } k &= \text{कोज्या}^2 \frac{k}{2} - \text{ज्या}^2 \frac{k}{2} = 2 \text{ कोज्या}^2 \frac{k}{2} - 1 \\ &= 1 - 2 \text{ ज्या}^2 \frac{k}{2} \end{aligned}$$

$$\text{और } \text{स्प } k = \frac{2 \text{ स्प } \frac{k}{2}}{1 - \text{स्प}^2 \frac{k}{2}}$$

८५ अथ ज्या k और कोज्या k को स्प $\frac{k}{2}$ के पदों में व्यक्त किया जायगा।

$$\begin{aligned} \text{ज्या } k &= 2 \text{ ज्या } \frac{k}{2} \cdot \text{कोज्या } \frac{k}{2} \\ &= \frac{2 \text{ ज्या } \frac{k}{2}}{\text{कोज्या } \frac{k}{2}} \cdot \text{कोज्या}^2 \frac{k}{2} \\ &= 2 \text{ स्प } \frac{k}{2} \cdot \frac{1}{\text{व्युत्कोज्या } \frac{k}{2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{2 \operatorname{sp} \frac{k}{2}}{1 + \operatorname{sp}^2 \frac{k}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{कोज्या } k &= \text{कोज्या}^2 \frac{k}{2} - \text{ज्या}^2 \frac{k}{2} \\ &= \text{कोज्या}^2 \frac{k}{2} - \frac{\text{ज्या}^2 \frac{k}{2}}{\text{कोज्या}^2 \frac{k}{2}} \cdot \text{कोज्या}^2 \frac{k}{2} \\ &= \text{कोज्या}^2 \frac{k}{2} \left(1 - \frac{\text{ज्या}^2 \frac{k}{2}}{\text{कोज्या}^2 \frac{k}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{\text{व्युत्कोज्या}^2 \frac{k}{2}} \left(1 - \operatorname{sp}^2 \frac{k}{2} \right) \\ &= \frac{1 - \operatorname{sp}^2 \frac{k}{2}}{1 + \operatorname{sp}^2 \frac{k}{2}} \end{aligned}$$

८.६ ज्या $\frac{k}{2}$, कोज्या $\frac{k}{2}$ और $\operatorname{sp} \frac{k}{2}$ की गहराई कोज्या k के पदों में निकालना ।

$$\text{कोज्या } k = 2 \text{ कोज्या}^2 \frac{k}{2} - 1 = 1 - 2 \text{ज्या}^2 \frac{k}{2}$$

इस सूत्र से

$$\text{ज्या } \frac{\text{क}}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \text{कोज्या } \frac{\text{क}}{2}}{2}}$$

$$\text{और, कोज्या } \frac{\text{क}}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \text{कोज्या } \frac{\text{क}}{2}}{2}}$$

इसलिए

$$\text{स्प } \frac{\text{क}}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \text{कोज्या } \frac{\text{क}}{2}}{1 + \text{कोज्या } \frac{\text{क}}{2}}}$$

८.६१ चिह्नों की संदिग्धता (ambiguity) का स्पष्टीकरण—

जब क की अर्धा दी हुई हो तो यह निश्चित रूप से ज्ञात होता है कि कोण $\frac{\text{क}}{2}$ किस चरण में है और इसलिए ज्या $\frac{\text{क}}{2}$, कोज्या $\frac{\text{क}}{2}$ और स्प $\frac{\text{क}}{2}$ के चिह्न भी निश्चित रूप से मालूम हो जाते हैं। यह आगे दिए गए उदाहरण से स्पष्ट हो जायगा।

परन्तु यदि क न दिया जाय केवल कोज्या क दिया जाय तो क और अतः $\frac{\text{क}}{2}$ की अनेक अर्धाएँ हो सकती हैं, जैसा कि छठवें अध्याय में देखा जा चुका है। इससे ज्या $\frac{\text{क}}{2}$, कोज्या $\frac{\text{क}}{2}$ और स्प $\frac{\text{क}}{2}$ के चिह्नों में संदेह उत्पन्न होता है।

उदाहरण— ज्या $22\frac{1}{2}^\circ$ और कोज्या $22\frac{1}{2}^\circ$ निकालो।

फ्योंकि कोण $22\frac{1}{2}^{\circ}$ प्रथम चरण में रहता है, इसलिए ज्या $22\frac{1}{2}^{\circ}$ और कोज्या $22\frac{1}{2}^{\circ}$ दोनों धन होते हैं।

$$\therefore \text{ज्या } 22\frac{1}{2}^{\circ} = + \sqrt{\frac{1 - \text{कोज्या } 45^{\circ}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

और कोज्या $22\frac{1}{2}^{\circ} = + \sqrt{\frac{1 + \text{कोज्या } 45^{\circ}}{2}}$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

८.७ ज्या $\frac{K}{2}$, कोज्या $\frac{K}{2}$ और स्प $\frac{K}{2}$ की अर्धांशों को ज्या क के वर्गों में निकालना।

$$\text{ज्या } K = 2 \text{ज्या } \frac{K}{2} \cdot \text{कोज्या } \frac{K}{2}$$

$$\text{और, } 1 = \text{ज्या}^2 \frac{K}{2} + \text{कोज्या}^2 \frac{K}{2}$$

योग और वियोग द्वारा

$$1 + \text{ज्या } K = \left(\text{कोज्या } \frac{K}{2} + \text{ज्या } \frac{K}{2} \right)^2 \quad \dots\dots(1)$$

$$1 - ज्या क = \left(कोज्या \frac{क}{२} - ज्या \frac{क}{२} \right)^2 \dots\dots(२)$$

(१) और (२) के वर्गमूल निकालने से

$$कोज्या \frac{क}{२} + ज्या \frac{क}{२} = \pm \sqrt{1 + ज्या क} \dots(३)$$

$$कोज्या \frac{क}{२} - ज्या \frac{क}{२} = \pm \sqrt{1 - ज्या क} \dots(४)$$

(३) और (४) के योग और वियोग से

$$कोज्या \frac{क}{२} = \pm \frac{१}{२} \sqrt{1 + ज्या क} \\ \pm \frac{१}{२} \sqrt{1 - ज्या क} \quad (५)$$

$$ज्या \frac{क}{२} = \pm \frac{१}{२} \sqrt{1 + ज्या क} \\ \mp \frac{१}{२} \sqrt{1 - ज्या क} \quad (६)$$

(६) को (५) से भाग देने पर $\tan \frac{क}{२}$ प्राप्त होता है।

८७१ चिह्नों की संदिग्धता का स्पष्टीकरण—

पूर्वकथनानुसार यदि क न देकर ज्या क दिया जाय तो, छठवें अध्याय के अनुसार, ज्याक की दी हुई अर्धा के लिए क की अर्धायों की एक श्रेणी बनती है।

अतः $\frac{क}{२}$ दोनों संभाव्य चरणों में से किसी एक में रह सकता है।

$$\begin{aligned}
 \text{अब कोज्या } \frac{क}{२} + ज्या \frac{क}{२} &= \sqrt{२} \left(\frac{१}{\sqrt{२}} कोज्या \frac{क}{२} + \frac{१}{\sqrt{२}} ज्या \frac{क}{२} \right) \\
 &= \sqrt{२} \left(ज्या \frac{प्या}{४} \cdot कोज्या \frac{क}{२} \right. \\
 &\quad \left. + कोज्या \frac{प्या}{४} ज्या \frac{क}{२} \right) \\
 &= \sqrt{२} ज्या \left(\frac{प्या}{४} + \frac{क}{२} \right)
 \end{aligned}$$

इसी प्रकार कोज्या $\frac{क}{२} - ज्या \frac{क}{२} = \sqrt{२} ज्या \left(\frac{प्या}{४} - \frac{क}{२} \right)$

जब क दिया हो, तो $\frac{प्या}{४} + \frac{क}{२}$ और $\frac{प्या}{४} - \frac{क}{२}$ के चरण निश्चित रूप से ज्ञात हो जाते हैं जिससे कोज्या $\frac{क}{२} + ज्या \frac{क}{२}$ और कोज्या $\frac{क}{२} - ज्या \frac{क}{२}$ के चिह्न भी निश्चित रूप से जाने जा सकते हैं। इस प्रकार राशियाँ ज्या $\frac{क}{२}$ और कोज्या $\frac{क}{२}$ भी निश्चित रूप से ज्ञात हो जाती हैं।

उदाहरण— यदि ज्या $18^\circ = \frac{\sqrt{4}-1}{8}$ दी हो तो, ज्या 9° और कोज्या 9° निकालो।

यहां क = 18° , जिससे $\frac{क}{2} = 9^\circ$

तो अनुच्छेद ८७ के (३) और (४) संबंध से
कोज्या $9^\circ + ज्या 9^\circ$

$$= + \sqrt{1 + ज्या 18^\circ} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{4}}{2}} \quad \dots (१)$$

कोज्या $9^\circ - ज्या 9^\circ$

$$= + \sqrt{1 - ज्या 18^\circ} = \sqrt{\frac{4 - \sqrt{4}}{2}} \quad \dots (२)$$

[9° के प्रथम चरण में होने के कारण ज्या 9° और कोज्या 9° दोनों धन हैं और इसीलिए कोज्या $9^\circ + ज्या 9^\circ$ भी धन है, इसी प्रकार यह स्पष्ट है कि कोज्या $9^\circ - ज्या 9^\circ$
 $= \sqrt{2} ज्या \left(\frac{ज्या}{8} - 9^\circ \right)$ भी धन है।]

(१) और (२) के योग और वियोग से

$$कोज्या 9^\circ = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{4}} + \sqrt{4 - \sqrt{4}}}{8}$$

$$और ज्या 9^\circ = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{4}} - \sqrt{4 - \sqrt{4}}}{8}$$

९° का लम्बपूर ८१° है इसलिए, ८१° की निष्पत्तियां भी लिखी जा सकती हैं।

८.८ $\frac{\text{स्प} \frac{\text{क}}{२}}$ को स्प क के पदों में व्यक्त करना।

$$\text{सूत्र से, स्प क} = \frac{२ \text{ स्प } \frac{\text{क}}{२}}{१ - \text{स्प}^२ \frac{\text{क}}{२}}$$

$$\text{अर्थात्, स्प क} \cdot \text{स्प}^२ \frac{\text{क}}{२} + २ \text{ स्प } \frac{\text{क}}{२} - \text{स्प क} = ०$$

इसलिए,

$$\text{स्प } \frac{\text{क}}{२} = \frac{-१ \pm \sqrt{१ + \text{स्प}^२ \text{क}}}{\text{स्प क}}$$

बिहों की संदिग्धता का स्पष्टीकरण पिछली दशाओं के समान होगा।

८.९ १८° और ३६° की निष्पत्तियां निकालना।

मानलो $\text{क} = १८^{\circ}$ तो, $\text{५ क} = ९०^{\circ}$

$$\therefore २\text{क} = ९०^{\circ} - ३\text{क}$$

$$\therefore \text{ज्या } २\text{क} = \text{कोज्या } ३\text{क}$$

$$\text{अथवा } २\text{ज्या क} \cdot \text{कोज्या क} = \text{कोज्या क} (४\text{कोज्या}^२ \text{क} - ३)$$

क्योंकि कोज्या क अर्थात् कोज्या १८° की अर्धा शून्य नहीं हो सकती, इसलिए

$2\text{ज्या } \theta = 4 \text{ कोज्या }^2 \theta - 3 = 1 - 4 \text{ ज्या }^2 \theta$
 अथवा, $4\text{ज्या }^2 \theta + 2\text{ज्या } \theta - 1 = 0$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{ज्या } \theta &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{4} \\
 &= \frac{\pm \sqrt{4 - 1}}{4}
 \end{aligned}$$

भय क धन न्यून कोण है इसलिए ऋण अर्ध छोड़ने
 से

$$\text{ज्या } 18^\circ = \frac{\sqrt{4 - 1}}{4}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{कोज्या } 18^\circ &= + \sqrt{1 - \text{ज्या }^2 18^\circ} \\
 &= \frac{1}{4} \left(\sqrt{10 + 2\sqrt{4}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{पुनः कोज्या } 36^\circ = 1 - 2\text{ज्या }^2 18^\circ$$

$$= \frac{1}{8} \left(\sqrt{4} + 1 \right)$$

$$\text{ज्या } 36^\circ = \sqrt{1 - \text{कोज्या }^2 36^\circ}$$

$$= \frac{1}{8} \left(\sqrt{10 - 2\sqrt{4}} \right)$$

उदाहरण— 45° और 135° की निष्पत्तियां निकालो।

८.२१ उदाहरण १— यदि $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-n}{1+n}}$ $\sin \frac{A}{2}$ हो,

तो सिद्ध करो कि

$$\cos \frac{A}{2} = \frac{\cos A - n}{1 - n \cos A}$$

$$\text{अथ, } \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-n}{1+n}} \sin \frac{A}{2}$$

$$\text{अथवा, } \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1+n}{1-n}} \sin \frac{A}{2}$$

अनुच्छेद ८.५ से,

$$\cos \frac{A}{2} = \frac{1 - \sin^2 \frac{A}{2}}{1 + \sin^2 \frac{A}{2}},$$

$$= \frac{1 - \frac{1+n}{1-n} \sin^2 \frac{A}{2}}{1 + \frac{1+n}{1-n} \sin^2 \frac{A}{2}}$$

$$= \frac{(1-n) - (1+n) \sin^2 \frac{A}{2}}{(1-n) + (1+n) \sin^2 \frac{A}{2}}$$

$$= \frac{(1 - \text{स्प}^{\frac{2^k}{2}}) - n(1 + \text{स्प}^{\frac{2^k}{2}})}{(1 + \text{स्प}^{\frac{2^k}{2}}) - n(1 - \text{स्प}^{\frac{2^k}{2}})}$$

$$= \frac{\frac{1 - \text{स्प}^{\frac{2^k}{2}}}{1 + \text{स्प}^{\frac{2^k}{2}}} - n}{\frac{1 - \text{स्प}^{\frac{2^k}{2}}}{1 + \text{स्प}^{\frac{2^k}{2}}} - n}$$

$$= \frac{\text{कोज्या } \frac{2^k}{2} - n}{1 - n \text{ कोज्या } \frac{2^k}{2}}$$

उदाहरण २— यह दिखाओ कि

$$1 = 2^0 \text{ कोज्या } \frac{\text{प्या}}{2^1} \text{ कोज्या } \frac{\text{प्या}}{2^2} \text{ कोज्या } \frac{\text{प्या}}{2^3}$$

$$\dots \text{कोज्या } \frac{\text{प्या}}{2^{n-1}} \text{ ज्या } \frac{\text{प्या}}{2^n}$$

$$\text{ज्या } \frac{\text{प्या}}{2} = 2 \text{ ज्या } \frac{\text{प्या}}{2^2} \text{ कोज्या } \frac{\text{प्या}}{2^2}$$

$$\text{ज्या } \frac{\text{प्या}}{2^2} = 2 \text{ ज्या } \frac{\text{प्या}}{2^3} \text{ कोज्या } \frac{\text{प्या}}{2^3}$$

$$\text{ज्या } \frac{\text{प्या}}{2^3} = 2 \text{ ज्या } \frac{\text{प्या}}{2^4} \text{ कोज्या } \frac{\text{प्या}}{2^4}$$

.....

$$\text{इसी प्रकार, ज्या } \frac{\text{प्या}}{2^s} = 2 \text{ ज्या } \frac{\text{प्या}}{2^{s+1}} \cdot \text{कोज्या } \frac{\text{प्या}}{2^{s+1}}$$

इसलिए सब समीकारों का एक साथ गुणन करने पर

$$\text{ज्या } \frac{\text{प्या}}{2} = 2^s \text{ कोज्या } \frac{\text{प्या}}{2^s} \text{ कोज्या } \frac{\text{प्या}}{2^s}$$

$$\dots \text{कोज्या } \frac{\text{प्या}}{2^{s+1}} \text{ ज्या } \frac{\text{प्या}}{2^{s+1}}$$

$$\text{परंतु ज्या } \frac{\text{प्या}}{2} = 1$$

$$\therefore 1 = 2^s \text{ कोज्या } \frac{\text{प्या}}{2^s} \text{ कोज्या } \frac{\text{प्या}}{2^s}$$

$$\dots \text{कोज्या } \frac{\text{प्या}}{2^{s+1}} \text{ ज्या } \frac{\text{प्या}}{2^{s+1}}$$

प्रश्नावलि १२

- (१) यदि अ और आ घन और न्यून हों और यदि कोज्या अ = $\frac{3}{4}$, और कोज्या आ = $\frac{12}{13}$ तो ज्या $\frac{\text{अ} + \text{आ}}{2}$ निकालो।

(२) यदि $\text{स्प } \theta = \frac{2 \text{ म न}}{\text{म}^2 - \text{न}^2}$ हो, तो $\text{स्प } \frac{\theta}{2}$ निकालो।
[फलकत्ता १८८०]

(३) (अ) कोस्प $\frac{\theta}{2}$ की अर्हा निकालो।

(आ) यह दिखाओ कि

$$\text{स्प}\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = (\sqrt{2} - \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)$$

(४) यदि θ और α न्यून कोण हों तथा

$$\text{कोज्या } 2\theta = \frac{3 \text{ कोज्या } 2\alpha - 1}{3 - \text{कोज्या } 2\alpha} \text{ हो, तो यह}$$

दिखाओ कि $\text{स्प } \theta = \sqrt{2} \text{ स्प } \alpha$

[फलकत्ता १९४१]

(५) यदि $\text{स्प } \theta = \text{कोज्या } 2\theta$, तो सिद्ध करो कि

$$\text{ज्या } 2\theta = \frac{1 - \text{स्प}^2 \theta}{1 + \text{स्प}^2 \theta}$$

[फलकत्ता १८७९]

सिद्ध करो—

$$\begin{aligned} (६) \quad (\text{कोज्या } \theta + \text{कोज्या } \frac{\theta}{2})^2 + (\text{ज्या } \theta + \text{ज्या } \frac{\theta}{2})^2 \\ = 8 \text{ कोज्या}^2 \left(\frac{\theta - \frac{\theta}{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (७) \quad (\text{कोज्या } \theta - \text{कोज्या } \frac{\theta}{2})^2 + (\text{ज्या } \theta - \text{ज्या } \frac{\theta}{2})^2 \\ = 8 \text{ ज्या}^2 \left(\frac{\theta - \frac{\theta}{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

$$(८) \frac{२ ज्या क - ज्या २ क}{२ ज्या क + ज्या २ क} = स्प^२ \frac{क}{२} \quad [कलकत्ता १८६२]$$

$$(९) \frac{कोस्प^२ \frac{क}{२} - १}{कोस्प^२ \frac{क}{२} + १} = \frac{२ कोज्या क}{१ + कोज्या^२ क} \quad [कलकत्ता १८६९]$$

$$(१०) (अ) कोज्या^४ \frac{प्या}{८} + कोज्या^४ \frac{उप्या}{८} \\ + कोज्या^४ \frac{५प्या}{८} + कोज्या^४ \frac{७प्या}{८} = \frac{३}{२}$$

$$(आ) ज्या^४ \frac{प्या}{८} + ज्या^४ \frac{उप्या}{८} \\ + ज्या^४ \frac{५प्या}{८} + ज्या^४ \frac{७प्या}{८} = \frac{३}{२} \\ [यनारस १९२७]$$

$$(११) \left(१ + स्प^२ \frac{अ}{२} + व्युत्कोज्या \frac{अ}{२} \right) \times \\ \left(१ + स्प^२ \frac{अ}{२} - व्युत्कोज्या \frac{अ}{२} \right) = \frac{२ ज्या अ}{१ + कोज्या अ}$$

$$(१२) स्प^२ \left(\frac{प्या}{४} - \frac{क}{२} \right) = \frac{व्युत्कोज्या क - स्प क}{व्युत्कोज्या क + स्प क}$$

$$(13) \quad \text{व्युज्ज्या} \left(\frac{\text{प्या}}{४} + \text{अ} \right) \text{व्युत्कोज्या} \left(\frac{\text{प्या}}{४} - \text{अ} \right) \\ = \frac{२}{(\text{कोज्या अ} + \text{ज्या म})^२}$$

$$(14) \quad \text{ज्या क} = \text{ज्या } (३६^\circ + \text{क}) - \text{ज्या } (३६^\circ - \text{क}) \\ - \text{ज्या } (७२^\circ + \text{क}) + \text{ज्या } (७२^\circ - \text{क}) \\ [\text{नागपुर १९४३}]$$

$$(15) \quad \text{यदि व्युत्कोज्या } (\text{क} + \text{ख}) + \text{व्युत्कोज्या } (\text{क} - \text{ख}) \\ = २ \text{ व्युत्कोज्या क हो तो} \\ \text{सिद्ध करो कि कोज्या स} = \sqrt{२} \text{ कोज्या } \frac{\text{क}}{२} \\ [\text{पटना १९४४}]$$

$$(16) \quad \text{यदि कोज्या अ} = \frac{\text{कोज्या इ} - \text{कोज्या ई}}{१ - \text{कोज्या इ कोज्या ई}} \text{ हो तो}$$

$$\text{सिद्ध करो कि } \text{स्प} \frac{\text{अ}}{२} \text{ की एक अर्ध स्प} \frac{\text{इ}}{२} \cdot \text{कोस्प} \frac{\text{ई}}{२} \text{ है।}$$

[पटना १९४२]

नवां अध्याय

ऐकात्म्य और त्रिकोणमितीय समीकार

१.१ तीन कोणों का योग-प्रमेय—

अथ, ज्या (क+ख+ग), कोज्या (क+ख+ग) और स्प (क+ख+ग) के विस्तार (expansions) निम्नलिखित किए जायेंगे।

$$(१) \text{ ज्या (क+ख+ग)}$$

$$= \text{ज्या (क+ख+ग)}$$

$$= \text{ज्या (क+ख)} \cdot \text{कोज्या ग} + \text{कोज्या (क+ख)} \cdot \text{ज्या ग}$$

$$= (\text{ज्या क} \cdot \text{कोज्या ख} + \text{कोज्या क} \cdot \text{ज्या ख}) \cdot \text{कोज्या ग}$$

$$+ (\text{कोज्या क} \cdot \text{कोज्या ख} - \text{ज्या क} \cdot \text{ज्या ख}) \cdot \text{ज्या ग}$$

$$= \text{ज्या क} \cdot \text{कोज्या ख} \cdot \text{कोज्या ग}$$

$$+ \text{ज्या ख} \cdot \text{कोज्या ग} \cdot \text{कोज्या क}$$

$$+ \text{ज्या ग} \cdot \text{कोज्या क} \cdot \text{कोज्या ख}$$

$$- \text{ज्या क} \cdot \text{ज्या ख} \cdot \text{ज्या ग}$$

इस सूत्र को इस रूप में लिख सकते हैं—

$$\text{या (क+ख+ग)} = \text{कोज्या क} \cdot \text{कोज्या ख} \cdot \text{कोज्या ग} \times$$

$$[रर क + स्प ख + स्प ग - स्प क \cdot स्प ख \cdot स्प ग]$$

$$(2) \text{ कोज्या (क + ख + ग)}$$

$$= \text{कोज्या (क + ख + ग)}$$

$$= \text{कोज्या (क + ख) कोज्या ग} - \text{ज्या (क + ख) ज्या ग}$$

$$= (\text{कोज्या क कोज्या ख} - \text{ज्या क ज्या ख}) \text{ कोज्या ग}$$

$$- (\text{ज्या क कोज्या ख} + \text{कोज्या क ज्या ख}) \text{ ज्या ग}$$

$$= \text{कोज्या क कोज्या ख कोज्या ग} - \text{कोज्या क ज्या ख ज्या ग}$$

$$- \text{कोज्या ख ज्या ग ज्या क} - \text{कोज्या ग ज्या क ज्या ख}$$

इस सूत्र को इस रूप में लिख सकते हैं।

$$\text{कोज्या (क + ख + ग)} = \text{कोज्या क कोज्या ख कोज्या ग} \times$$

$$[1 - \text{स्प ख स्प ग} - \text{स्प ग स्प क} - \text{स्प क स्प ख}]$$

$$(3) \text{ स्प (क + ख + ग)} = \text{स्प (क + ख + ग)}$$

$$= \frac{\text{स्प (क + ख)} + \text{स्प ग}}{1 - \text{स्प (क + ख) स्प ग}}$$

$$= \frac{\frac{\text{स्प क} + \text{स्प ख}}{1 - \text{स्प क स्प ख}} + \text{स्प ग}}{1 - \frac{\text{स्प क} + \text{स्प ख}}{1 - \text{स्प क स्प ख}} \cdot \text{स्प ग}}$$

$$= \frac{\text{स्प क} + \text{स्प ख} + \text{स्प ग} - \text{स्प क स्प ख स्प ग}}{1 - \text{स्प ख स्प ग} - \text{स्प ग स्प क} - \text{स्प क स्प ख}}$$

उपप्रमेय— यदि $\text{क + ख + ग} = 180^\circ$ तो
 $\text{स्प (क + ख + ग)} = 0$ । अतः स्प (क + ख + ग) के विस्तार में
 अंश शून्य सम होना चाहिए।

इसलिए इस दशा में

$$\text{स्प क} + \text{स्प ख} + \text{स्प ग} = \text{स्प क} \cdot \text{स्प ख} \cdot \text{स्प ग}$$

९.२ यदि कोण क, ख और ग का योग 180° हो, तो उनकी त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों के अनेक ऐकात्मिक संबंध प्रतिपादित (established) किए जा सकते हैं।

इन सम्यन्धों की उपपत्ति की रीति मागे दिए उदाहरणों से भली भांति समझी जा सकती है।

उदाहरण १— यदि क, ख और ग किसी त्रिभुज के तीन कोण हों तो सिद्ध करो कि

$$\text{ज्या क} + \text{ज्या ख} + \text{ज्या ग}$$

$$= 4 \text{ कोज्या } \frac{\text{क}}{2} \text{ कोज्या } \frac{\text{ख}}{2} \text{ कोज्या } \frac{\text{ग}}{2}$$

$$\text{वामपक्ष} = (\text{ज्या क} + \text{ज्या ख}) + \text{ज्या ग}$$

$$= 2 \text{ ज्या } \frac{\text{क} + \text{ख}}{2} \text{ कोज्या } \frac{\text{क} - \text{ख}}{2} + 2 \text{ ज्या } \frac{\text{ग}}{2} \text{ कोज्या } \frac{\text{ग}}{2}$$

$$\text{क्योंकि } \text{क} + \text{ख} + \text{ग} = 180^\circ$$

$$\therefore \frac{\text{क} + \text{ख}}{2} = 90^\circ - \frac{\text{ग}}{2}$$

$$\therefore \text{ज्या } \frac{\text{क} + \text{ख}}{2} = \text{कोज्या } \frac{\text{ग}}{2}$$

$$\text{और } \text{कोज्या } \frac{\text{क} + \text{ख}}{2} = \text{ज्या } \frac{\text{ग}}{2}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \text{चामपक्ष} &= 2\cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B-C}{2} \\
&\quad + 2\cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B+C}{2} \cdot \cos\frac{A}{2} \\
&= 2\cos\frac{A}{2} \left(\cos\frac{B-C}{2} + \cos\frac{B+C}{2} \right) \\
&= 2\cos\frac{A}{2} \left(2\cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} \right) \\
&= 4\cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} \\
&= \text{दक्षिण पक्ष}
\end{aligned}$$

उदाहरण २— यदि $A + B + C = 180^\circ$ तो सिद्ध करो कि
 $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C$

$$= -1 - 4\cos A \cos B \cos C$$

$$\begin{aligned}
\text{चामपक्ष} &= (\cos 2A + \cos 2B) + \cos 2C \\
&= 2 \cos(A+B) \cos(A-B) + \cos 2C \\
&\quad + 2\cos^2 C - 1
\end{aligned}$$

$$\text{परन्तु, } A+B = 180^\circ - C$$

$$\therefore \cos(A+B) = -\cos C$$

\therefore चामपक्ष

$$\begin{aligned}
&= -2\cos C \cos(A-B) + 2\cos^2 C - 1 \\
&= 2\cos C \left\{ -\cos(A-B) + \cos C \right\} - 1
\end{aligned}$$

$$= 2 \cos A \left\{ -\cos A (\cos B - \cos C) \right. \\ \left. - \cos A (\cos B + \cos C) \right\} - 1$$

$$= 2 \cos A \left(-2 \cos A \cos B \right) - 1 \\ = -1 - 4 \cos A \cos B \cos C \\ = \text{दक्षिण पक्ष}$$

उदाहरण २— यदि $\cos A + \cos B + \cos C = 1$ तो सिद्ध करो कि
 $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$

$$\text{वामपक्ष} = \frac{1}{2} (2 \cos^2 A + 2 \cos^2 B) \\ - \cos^2 C$$

$$= \frac{1}{2} (1 + \cos 2A) + \frac{1}{2} (1 + \cos 2B) \\ - \cos^2 C$$

$$= 1 + \frac{1}{2} (\cos 2A + \cos 2B) - \cos^2 C$$

$$= 1 + \cos A (\cos B + \cos C) - \cos^2 C \\ - \cos A \cos B \cos C$$

$$\text{परन्तु, } \cos A + \cos B + \cos C = 1$$

$$\therefore \cos A (\cos B + \cos C) = -\cos A \cos C$$

$$\therefore \text{वामपक्ष} = 1 - \cos A \cos C - \cos^2 C \\ + \cos A (\cos B + \cos C) - \cos A \cos B \cos C$$

$$= 1 - \text{कोज्या ग} \{ \text{कोज्या (क-ख)} \}$$

$$- \text{कोज्या (क+ख)} \}$$

$$= 1 - \text{कोज्या ग} - 2 \text{ ज्या क.ज्या ख}$$

$$= 1 - 2 \text{ ज्या क ज्या ख.कोज्या ग}$$

$$= \text{दक्षिण पक्ष}$$

उदाहरण ४— यदि $\text{क} + \text{ख} + \text{ग} = \text{प्या}$ तो सिद्ध करो कि

$$\text{कोस्प } \frac{\text{क}}{2} + \text{कोस्प } \frac{\text{ख}}{2} + \text{कोस्प } \frac{\text{ग}}{2}$$

$$= \text{कोस्प } \frac{\text{क}}{2} \text{ कोस्प } \frac{\text{ख}}{2} \text{ कोस्प } \frac{\text{ग}}{2}$$

क्योंकि $\text{क} + \text{ख} + \text{ग} = \text{प्या}$,

$$\text{अतः } \frac{\text{क}}{2} + \frac{\text{ख}}{2} + \frac{\text{ग}}{2} = \frac{\text{प्या}}{2}$$

$$\therefore \text{स्प} \left(\frac{\text{ख}}{2} + \frac{\text{ग}}{2} \right) = \text{स्प} \left(\frac{\text{प्या}}{2} - \frac{\text{क}}{2} \right)$$

$$\text{अथवा } \frac{\text{स्प } \frac{\text{ख}}{2} + \text{स्प } \frac{\text{ग}}{2}}{1 - \text{स्प } \frac{\text{ख}}{2} \text{ स्प } \frac{\text{ग}}{2}} = \text{कोस्प } \frac{\text{क}}{2} = \frac{1}{\text{स्प } \frac{\text{क}}{2}}$$

$$\text{अथवा स्प } \frac{\text{क}}{2} \left(\text{स्प } \frac{\text{ख}}{2} + \text{स्प } \frac{\text{ग}}{2} \right) = 1 - \text{स्प } \frac{\text{ख}}{2} \cdot \text{स्प } \frac{\text{ग}}{2}$$

$$\text{अथवा } \operatorname{sp} \frac{x}{2} \operatorname{sp} \frac{g}{2} + \operatorname{sp} \frac{g}{2} \operatorname{sp} \frac{k}{2} + \operatorname{sp} \frac{k}{2} \operatorname{sp} \frac{x}{2} = 1$$

आदिसे अन्ततक को $\operatorname{sp} \frac{k}{2}$ को $\operatorname{sp} \frac{x}{2}$ को $\operatorname{sp} \frac{g}{2}$ से गुणा करने पर

$$\begin{aligned} \operatorname{sp} \frac{k}{2} + \operatorname{sp} \frac{x}{2} + \operatorname{sp} \frac{g}{2} \\ = \operatorname{sp} \frac{k}{2} \cdot \operatorname{sp} \frac{x}{2} \cdot \operatorname{sp} \frac{g}{2} \end{aligned}$$

अथवा

$$\operatorname{sp} \left(\frac{k}{2} + \frac{x}{2} + \frac{g}{2} \right) = \operatorname{sp} \frac{p}{2}$$

$$\therefore \frac{\operatorname{sp} \frac{k}{2} + \operatorname{sp} \frac{x}{2} + \operatorname{sp} \frac{g}{2} - \operatorname{sp} \frac{k}{2} \operatorname{sp} \frac{x}{2} \operatorname{sp} \frac{g}{2}}{1 - \operatorname{sp} \frac{x}{2} \operatorname{sp} \frac{g}{2} - \operatorname{sp} \frac{g}{2} \operatorname{sp} \frac{k}{2} - \operatorname{sp} \frac{k}{2} \operatorname{sp} \frac{x}{2}} = \infty$$

इसलिए वामपक्ष का हर शून्य सम होना चाहिए।

$$\therefore 1 - \operatorname{sp} \frac{x}{2} \cdot \operatorname{sp} \frac{g}{2} - \operatorname{sp} \frac{g}{2} \cdot \operatorname{sp} \frac{k}{2} - \operatorname{sp} \frac{k}{2} \cdot \operatorname{sp} \frac{x}{2} = 0$$

$$\text{अथवा } \operatorname{sp} \frac{x}{2} \cdot \operatorname{sp} \frac{g}{2} + \operatorname{sp} \frac{g}{2} \cdot \operatorname{sp} \frac{k}{2} + \operatorname{sp} \frac{k}{2} \cdot \operatorname{sp} \frac{x}{2} = 1$$

आदिसे अन्ततक को $\operatorname{sp} \frac{k}{2}$ को $\operatorname{sp} \frac{x}{2}$ को $\operatorname{sp} \frac{g}{2}$ से गुणा करने पर अपेक्षित फल प्राप्त होता है।

प्रठनावलि १३

- (१) यदि $k + x + g = 120$ तो सिद्ध करो कि
 $\text{ज्या}^2 k + \text{ज्या}^2 x + \text{ज्या}^2 g = 4 \text{ज्या } k \text{ ज्या } x \text{ ज्या } g$
 [ननारस १९४२]
- (२) कोज्या $k +$ कोज्या $x +$ कोज्या g
 $= 1 + 4 \text{ज्या } \frac{k}{2} \text{ ज्या } \frac{x}{2} \text{ ज्या } \frac{g}{2}$
- (३) कोज्या $k +$ कोज्या $x -$ कोज्या g
 $= -1 + 4 \text{ कोज्या } \frac{k}{2} \text{ कोज्या } \frac{x}{2} \text{ ज्या } \frac{g}{2}$
- (४) कोज्या^२ $k +$ कोज्या^२ $x +$ कोज्या^२ g
 $= 1 - 2 \text{ कोज्या } k \text{ कोज्या } x \text{ कोज्या } g$
 [नागपुर १९४०]
- (५) ज्या^२ $k +$ ज्या^२ $x +$ ज्या^२ g
 $= 2 + 2 \text{ कोज्या } k \text{ कोज्या } x \text{ कोज्या } g$
 [ननारस १९४०]
- (६) ज्या^२ $k +$ ज्या^२ $x -$ ज्या^२ $g = 2 \text{ ज्या } k \text{ ज्या } x \text{ कोज्या } g$
 [ननारस १९४४]

$$(७) \text{ ज्या }^2 \frac{क}{२} + \text{ज्या }^2 \frac{ख}{२} + \text{ज्या }^2 \frac{ग}{२}$$

$$= १ - २ \text{ज्या } \frac{क}{२} \text{ज्या } \frac{ख}{२} \text{ज्या } \frac{ग}{२}$$

[पटना १९४२]

$$(८) \text{ ज्या }^2 \frac{क}{२} + \text{ज्या }^2 \frac{ख}{२} - \text{ज्या }^2 \frac{ग}{२}$$

$$= १ - २ \text{कोज्या } \frac{क}{२} \text{कोज्या } \frac{ख}{२} \text{ज्या } \frac{ग}{२}$$

[नागपुर १९४४]

$$(९) \text{ कोज्या } \frac{क}{२} + \text{कोज्या } \frac{ख}{२} + \text{कोज्या } \frac{ग}{२}$$

$$= ४ \text{कोज्या } \frac{ख+ग}{२} \text{कोज्या } \frac{ग+क}{२} \text{कोज्या } \frac{क+ख}{२}$$

[इलाहाबाद १९३९]

$$(१०) \text{ कोज्या } \frac{क}{२} + \text{कोज्या } \frac{ख}{२} - \text{कोज्या } \frac{ग}{२}$$

$$= ४ \text{कोज्या } \frac{प्या+क}{४} \text{कोज्या } \frac{प्या+ख}{४} \text{कोज्या } \frac{प्या-ग}{४}$$

[पटना १९४२]

$$(११) \text{ ज्या } \frac{क}{२} + \text{ज्या } \frac{ख}{२} + \text{ज्या } \frac{ग}{२} - १$$

$$= ४ \text{ज्या } \frac{प्या-क}{४} \text{ज्या } \frac{प्या-ख}{४} \text{ज्या } \frac{प्या-ग}{४}$$

[पटना १९४१]

$$(१२) \text{ ज्या (ख + ग - क) + ज्या (ग + क - ख)} \\ + \text{ज्या (क + ख - ग)} = ४\text{ज्या क} \cdot \text{ज्या ख} \cdot \text{ज्या ग} \\ \text{[इलाहाबाद १९४०]}$$

$$(१३) \frac{\text{कोज्या (ख - ग)}}{\text{ज्या ख} \cdot \text{ज्या ग}} + \frac{\text{कोज्या (ग - क)}}{\text{ज्या ग} \cdot \text{ज्या क}} \\ + \frac{\text{कोज्या (क - ख)}}{\text{ज्या क} \cdot \text{ज्या ख}} = ४ \\ \text{[नागपुर १९४१]}$$

$$(१४) \text{ कोस्प ख कोस्प ग + कोस्प ग कोस्प क} \\ + \text{कोस्प क कोस्प ख} = १$$

$$(१५) \text{ यदि, क + ख + ग} = \frac{\text{ज्या}}{२} \text{ तो सिद्ध करो कि}$$

$$(अ) \text{ कोस्प क + कोस्प ख + कोस्प ग} \\ = \text{कोस्प क कोस्प ख कोस्प ग}$$

$$(भा) \text{ ज्या}^२\text{क + ज्या}^२\text{ख + ज्या}^२\text{ग} \\ + २\text{ज्याक} \cdot \text{ज्या ख} \cdot \text{ज्या ग} = १ \\ \text{[फलकत्ता १९४३]}$$

$$(इ) \frac{\text{ज्या}^२\text{क} + \text{ज्या}^२\text{ख} + \text{ज्या}^२\text{ग}}{\text{ज्या}^२\text{क} - \text{ज्या}^२\text{ख} + \text{ज्या}^२\text{ग}} = \text{कोस्प क} \cdot \text{कोस्प ग}$$

$$(१६) \text{ यदि इ + ई} = \text{उ तो सिद्ध करो कि} \\ \text{कोज्या}^२\text{इ + कोज्या}^२\text{ई} - २\text{कोज्या इ} \cdot \text{कोज्या ई} \cdot \text{कोज्या उ} \\ = \text{ज्या}^२\text{उ} \\ \text{[पटना १९३६]}$$

(१७) यदि $k + x + g = 0$ हो तो दिखाओ कि

$$\begin{aligned} \text{स्प } k + \text{स्प } x + \text{स्प } g &= \text{स्प } k \cdot \text{स्प } x \cdot \text{स्प } g \\ \text{अब सिद्ध करो कि, } \sqrt{3} + \text{स्प } 80^\circ + \text{स्प } 60^\circ \\ &= \sqrt{3} \text{स्प } 80^\circ \text{स्प } 60^\circ \\ &\quad [\text{चनारस १९३५}] \end{aligned}$$

(१८) यदि $(k + x + g) = 2h$, तो सिद्ध करो कि

$$\begin{aligned} \text{ज्या } (h - k) \cdot \text{ज्या } (h - x) + \text{ज्या } (h - g) \cdot \text{ज्या } h \\ = \text{ज्या } k \cdot \text{ज्या } x \\ [\text{पटना १९३२}] \end{aligned}$$

(१९) यदि $(y + r + l) = yrl$, तो सिद्ध करो कि

$$\begin{aligned} y(1 - r^2)(1 - l^2) + r(1 - l^2)(1 - y^2) \\ + l(1 - y^2)(1 - r^2) = 4yrl \end{aligned}$$

(२०) यदि $k + x + g = p$ तो सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} \text{ज्या}^2 k & \text{कोस्प } k & 1 \\ \text{ज्या}^2 x & \text{कोस्प } x & 1 \\ \text{ज्या}^2 g & \text{कोस्प } g & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad [\text{कलकत्ता १९३१}]$$

९.३ क. कोज्या $x + \text{ज्या } y = g$

इस रूप के सभी कारों को सिद्ध करना,

$$\text{जहां } g < \sqrt{k^2 + x^2}$$

पहली रीति:— इ की लघुत्तम धन अर्हा लेकर और
अ को धन मानकर

$$k = \text{अ कोज्या } इ,$$

$$x = \text{अ ज्या } इ \quad \text{रखो।}$$

$$\text{तो, } z = \sqrt{k^2 + x^2}$$

$$\text{ज्या इ} = \frac{x}{\sqrt{k^2 + x^2}}$$

$$\text{और कोज्या इ} = \frac{k}{\sqrt{k^2 + x^2}}$$

क और ख दत्त हैं, इसलिए उनके चिन्ह, इ का चरण निश्चित करते हैं और उनकी अर्थात् z और इ की अर्थात् को निश्चित करती हैं।

अब दत्त समीकार का

अ कोज्या (अ - इ) = ग में रूपान्तरण हो जाता है .

$$\text{अथवा कोज्या (अ - इ)} = \frac{g}{z} = \frac{g}{\sqrt{k^2 + x^2}}$$

क्योंकि $g < \sqrt{k^2 + x^2}$, इसलिए दक्षिण पक्ष महत्ता में १ से छोटा है।

अतः एक लघुत्तम घन कोण ई निश्चय किया जा सकता है जिसकी कोज्या, $\frac{g}{\sqrt{k^2 + x^2}}$ (जो एक ज्ञात राशि है) के सम है।

इसलिए कोज्या (अ - इ) = कोज्या ई

इसलिए यदि स शून्य, अथवा घन अथवा ऋण कोई पूर्णांक हो, तो

$$अ - इ = २ स प्या \pm इ$$

$$\text{अथवा, } अ = २ स प्या + इ \pm इ$$

दूसरी रीति— दत्त समीकार का साधन $स्प \frac{अ}{२} = प$

का आदेश करने से भी हो सकता है।

$$\text{क्योंकि ज्या } अ = \frac{२ स्प \frac{अ}{२}}{१ + स्प^२ \frac{अ}{२}} = \frac{२ प}{१ + प^२}$$

$$\text{और कोज्या } अ = \frac{१ - स्प^२ \frac{अ}{२}}{१ + स्प^२ \frac{अ}{२}} = \frac{१ - प^२}{१ + प^२}$$

(अनुच्छेद ८५)

इसलिए दत्त समीकार का

$$क \frac{१ - प^२}{१ + प^२} + ख \frac{२ प}{१ + प^२} = ग \text{ में रूपांतरण हो जाता है।}$$

$$\text{अथवा } प^२ (ग + क) - २ख प + (ग - क) = ०$$

क्योंकि यह प का वर्ग समीकार (quadratic equation) है इसलिए इसका समाधान करने वाली प की दो अर्थात् होंगी। मान लो वे $प_१$ और $प_२$ हैं।

तो $\frac{अ}{२} = प$, अथवा $प = \dots\dots\dots(१)$

मान लो समीकार (१) का समाधान करने वाली अ की लघुतम धन अर्थात् ई, और ई, हैं।

इसलिए $\frac{अ}{२} = स्प ई$, अथवा $स्प ई$,

∴ यदि स शून्य अथवा कोई पूर्णांक हो तो

$\frac{अ}{२}$ की सामान्य अर्धा

$\frac{अ}{२} = स प्या + ई$, अथवा $\frac{अ}{२} = स प्या + ई$ है।

अर्थात् $अ = २स प्या + २ई$, अथवा $अ = २स प्या + २ई$

उदाहरण— समीकार का साधन करो।

ज्या $अ + \sqrt{३}$ कोज्या $अ = \sqrt{२}$ [कलकत्ता १९३८]

आदिसे अन्ततक $\sqrt{(\sqrt{३})^२ + (१)^२}$ अर्थात् २ से भाग देने पर,

$$\frac{\sqrt{३}}{२} \text{ कोज्या } अ + \frac{१}{२} \text{ ज्या } अ = \frac{१}{\sqrt{२}}$$

$$\text{परन्तु } \frac{\sqrt{३}}{२} = \text{कोज्या } \frac{प्या}{६}, \frac{१}{२} = \text{ज्या } \frac{प्या}{६}$$

$$\text{और } \frac{१}{\sqrt{२}} = \text{कोज्या } \frac{प्या}{४}$$

$$\therefore \text{कोज्या अ कोज्या} \frac{\text{प्या}}{६} + \text{ज्या अ. ज्या} \frac{\text{प्या}}{६} = \text{कोज्या} \frac{\text{प्या}}{४}$$

$$\text{अथवा कोज्या} \left(\text{अ} - \frac{\text{प्या}}{६} \right) = \text{कोज्या} \frac{\text{प्या}}{४}$$

$$\therefore \text{अ} - \frac{\text{प्या}}{६} = २ \text{स. प्या} \pm \frac{\text{प्या}}{४}$$

$$\therefore \text{अ} = २ \text{स. प्या} \pm \frac{\text{प्या}}{४} + \frac{\text{प्या}}{६}$$

$$\text{अर्थात् अ} = २ \text{स प्या} + \frac{५ \text{प्या}}{१२}$$

$$\text{अथवा अ} = २ \text{स प्या} - \frac{\text{प्या}}{१२}$$

१.४ कई त्रिकोणमितीय समीकारों का योग और वियोग प्रमेयों के प्रयोग से साधन किया जा सकता है।

उदाहरण— सिद्ध करो कि

$$\text{ज्या य} + \text{ज्या २ य} + \text{ज्या ३ य} = ०$$

$$\text{अथवा ज्या य} + \text{ज्या ३ य} = - \text{ज्या २ य}$$

$$\text{अथवा २ ज्या २ य कोज्या य} = - \text{ज्या २ य}$$

(अनुच्छेद ७.७ से)

$$\therefore \text{ज्या २ य} = ० \text{ अथवा २ कोज्या य} = -१$$

यदि ज्या २ य = ०, तो २ य = स. प्या

$$\therefore \text{य} = \frac{\text{स}}{२} \text{ प्या}$$

यदि कोज्या $y = -\frac{1}{2}$ अर्थात् कोज्या $y = \text{कोज्या} \frac{2\text{प्या}}{3}$

तो $y = 2 \text{ स प्या} \pm \frac{2\text{प्या}}{3}$

अतः $y = \frac{\text{स प्या}}{2}$ अथवा $2 \text{ स प्या} \pm \frac{2\text{प्या}}{3}$

प्रश्नावलि १४

सिद्ध करो कि

(१) ज्या $x + \text{कोज्या } x = 1$ [संवर १०.२८

(२) $3 \text{ ज्या } x + 4 \text{ कोज्या } x = 2 \frac{1}{2}$ (सं ३६°५२' = $\frac{3}{8}$)

[भांध १९३३

(३) ज्या $x + \sqrt{3} \text{ कोज्या } x = 1$ [भांध १९४२

(४) $\text{च्युत्कोज्या } x - 1 = (\sqrt{2} - 1) \text{ स } x$ [नागपुर १९४१

(५) $\text{च्युज्या } x = \text{कोस } x + \sqrt{3}$ [नागपुर १९४६

(६) यदि समीकार $k \text{ कोज्या } x + g \text{ ज्या } x = g$ या समाधान करने वाली x ही दो यहाँ ६ और ६ हों तो सिद्ध करो कि

$$\text{ज्या } (6 + 6) = \frac{2 \text{ क र } x}{\text{क.}^2 + \text{स.}^2}$$

[नागपुर १९. . .

$$(७) \text{ कोज्या य } + \text{ कोज्या ३ य } + \text{ कोज्या ५ य } = ०$$

[वनारस १९३०]

$$(८) \text{ कोज्या अ } + \text{ ज्या २ अ } - \text{ कोज्या ३ अ } = ० \quad [\text{पट्टना १९३६}]$$

$$(९) \text{ कोज्या ३ अ } + २ \text{ कोज्या अ } = ० \quad [\text{नागपुर १९२५}]$$

$$(१०) १ + \text{ ज्या }^२ \text{ अ } = ३ \text{ ज्या अ कोज्या अ } \quad [\text{नागपुर १९४४}]$$

$$(११) \text{ व्युत्कोज्या }^२ \frac{\text{य}}{२} + \text{ व्युज्या }^२ \frac{\text{य}}{२} = १६ \text{ कोस्प य,}$$

[नागपुर १९४१]

$$(१२) \text{ स्प अ } + \text{ व्युत्कोज्या २ अ } - १ \quad [\text{नागपुर १९४०}]$$

$$(१३) \text{ कोज्या ३ य } + \text{ ज्या २ य } = ० \quad [\text{नागपुर १९४२}]$$

$$(१४) \text{ कोज्या ३ अ कोज्या २ अ } = \text{ कोज्या अ } \quad [\text{नागपुर १९४३}]$$

$$(१५) \text{ कोज्या अ } + \text{ कोज्या २ अ } + \text{ कोज्या ३ अ } = ०$$

$$(१६) \text{ स्प अ } + \text{ स्प २ अ } + \text{ स्प ३ अ } = ०$$

$$(१७) \text{ कोज्या २ य } - \text{ ज्या २ य } = \text{ कोज्या य } - \text{ ज्या य } - १$$

[वनारस १९३८]

$$(१८) \text{ कोज्या ३ अ } - \text{ कोज्या ५ अ } = \text{ ज्या अ }$$

[वनारस १९३९]

दसवां अध्याय

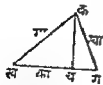
त्रिभुज की भुजाओं और कोणों में पारस्परिक संबंध

१०.१ अब त्रिभुज की भुजाओं और उसके कोणों की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों में कुछ संबंध स्थापित किए जायेंगे। त्रिभुज के कोण क, ख और ग तथा उनके सम्मुख की भुजाएँ क्रमशः का, खा और गा से दर्शाई जाती हैं।

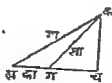
१०.२ ज्या-नियम (law of sines)— प्रत्येक त्रिभुज में कोणों की ज्याएँ क्रमशः सामने की भुजाओं की अनुपाती होती हैं।

इस प्रकार \triangle कखग में

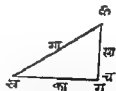
$$\frac{\text{ज्या क}}{\text{का}} = \frac{\text{ज्या ख}}{\text{खा}} = \frac{\text{ज्या ग}}{\text{गा}}$$



आकृति (अ)



आकृति (आ)



आकृति (इ)

आ. १०.१

मान लो कक्ष एक त्रिभुज है। क शीर्ष से खग रेखा पर कच लम्ब खींचो।

जैसा आकृतियों से स्पष्ट है, कोण ग के न्यून, अधिक (obtuse angle) अथवा लम्ब कोण होने के अनुसार बिंदु च क्रमशः रेखा खग पर, वर्धित खग पर अथवा ध्रुव (extremity) ग पर होगा।

पर्योक्ति कच रेखा, खग रेखा पर लंब है,
अतः प्रत्येक आकृति में,

$$\frac{\text{कच}}{\text{कग}} = \text{ज्या ख,}$$

अथवा कच = गा. ज्या ख (१)

पुनः आकृति (अ) में

$$\frac{\text{कच}}{\text{कग}} = \text{ज्या ग.}$$

अथवा कच = खा. ज्या ग

आकृति (आ) में

$$\frac{\text{कच}}{\text{कग}} = \text{ज्या (कगच)} = \text{ज्या } (180^\circ - ग) = \text{ज्या ग}$$

अथवा इस आकृति में भी,

$$\text{कच} = \text{खा ज्या ग}$$

आकृति (इ) में

$$\text{कच} = \text{का} = \text{रा परन्तु इस आकृति में ग} = 90^\circ$$

∴ ज्या ग = १

और कच = खा. ज्या ग

अतः सय आकृतियों में

कच = खा. ज्या ग

(१) और (२) से

गा. ज्या ख = खा. ज्या ग

$$\therefore \frac{\text{ज्या ख}}{\text{खा}} = \frac{\text{ज्या ग}}{\text{गा}}$$

इसी प्रकार यह भी सिद्ध किया जा सकता है कि

$$\frac{\text{ज्या क}}{\text{का}} = \frac{\text{ज्या ख}}{\text{खा}}$$

$$\text{इसलिए } \frac{\text{ज्या क}}{\text{का}} = \frac{\text{ज्या ख}}{\text{खा}} = \frac{\text{ज्या ग}}{\text{गा}}$$

संघर्ष प्राप्त होता है।

१०२१ कोटिज्या नियम (law of cosines) —

△ कखग में,

$$\text{कोज्या क} = \frac{\text{खा}^2 + \text{गा}^2 - \text{का}^2}{२\text{खा गा}}$$

$$\text{कोज्या ख} = \frac{\text{गा}^2 + \text{का}^2 - \text{खा}^2}{२\text{गा का}}$$

$$\text{कोज्या ग} = \frac{\text{का}^2 + \text{खा}^2 - \text{गा}^2}{२\text{का खा}}$$

पिछले अनुच्छेद की आकृति (अ) से जिसमें ग न्यूनकोण है

$$\text{कख}^2 = \text{खग}^2 + \text{कग}^2 - २\text{खग} \cdot \text{कग} \cdot \text{कोज्या ग}$$

$$= \text{खग}^2 + \text{कग}^2 - २\text{खग} \cdot \text{कग} \cdot \text{कोज्या ग}$$

$$\begin{aligned}
 \text{अथवा } \text{गा}^2 &= \text{का}^2 + \text{खा}^2 - 2\text{का.खा कोज्या ग} \\
 \text{आकृति (आ) से जिसमें ग अधिक कोण है,} \\
 \text{कख}^2 &= \text{खग}^2 + \text{कग}^2 + 2\text{खग.कग} \\
 &= \text{खग}^2 + \text{कग}^2 + 2\text{खग.कग कोज्या } (180^\circ - \text{ग}) \\
 &= \text{खग}^2 + \text{कग}^2 - 2\text{खग.कग कोज्या ग}
 \end{aligned}$$

अथवा $\text{गा}^2 = \text{का}^2 + \text{खा}^2 - 2\text{का.खा कोज्या ग}$
यह पिछले फल के समान ही है।

आकृति (इ) से जिसमें ग लघु कोण है,

$$\text{कख}^2 = \text{खग}^2 + \text{कग}^2$$

$$\text{अथवा } \text{गा}^2 = \text{का}^2 + \text{खा}^2$$

परन्तु, क्योंकि $\text{ग} = 90^\circ$, और कोज्या ग $= 0$

यह संबंध इस प्रकार भी लिखा जा सकता है—

$$\text{गा}^2 = \text{का}^2 + \text{खा}^2 - \text{का.खा.कोज्या ग}$$

इस कारण सब त्रिभुजों के लिये यह संबंध सत्य है।

इसी प्रकार यह भी सिद्ध किया जा सकता है कि

$$\text{का}^2 = \text{खा}^2 + \text{गा}^2 - 2\text{खा.गा.कोज्या क}$$

$$\text{और } \text{खा}^2 = \text{गा}^2 + \text{का}^2 - 2\text{गा.का.कोज्या ख}$$

इन संबंधों से

$$\text{कोज्या क} = \frac{\text{खा}^2 + \text{गा}^2 - \text{का}^2}{2\text{खा.गा}}$$

$$\text{कोज्या ख} = \frac{\text{गा}^2 + \text{का}^2 - \text{खा}^2}{2\text{गा.का}}$$

$$\text{कोज्या ग} = \frac{\text{का}^2 + \text{खा}^2 - \text{गा}^2}{2\text{का.खा}}$$

१०.३ किसी भी त्रिभुज में

$$का = खा.कोज्या ग + गा.कोज्या ख$$

अनुच्छेद १०.२१ से

$$खा.कोज्या ग + गा.कोज्या ख$$

$$= खा. \frac{का^2 + खा^2 - गा^2}{२का खा} + गा. \frac{गा^2 + का^2 - खा^2}{२गा का}$$

(अनुच्छेद १०.२१ से)

$$= \frac{का^2 + खा^2 - गा^2}{२का} + \frac{गा^2 + का^2 - खा^2}{२का}$$

$$= \frac{२का^2}{२का} = का$$

इसी प्रकार खा = गा कोज्या क + का कोज्या ग

और गा = का कोज्या ख + खा कोज्या क

उदाहरण— त्रैलिकीय विधि से सिद्ध करो कि किसी भी त्रिभुज में का = खा कोज्या ग + गा कोज्या ख

१०.४ अब किसी त्रिभुज के अर्धकोणों की निष्पत्तियाँ उसकी भुजाओं के पदों में निश्चित की जायगी।

यदि त्रिभुज का सामे-परिमाप (semi-perimeter) सा हो, तो

$$(१) \quad ज्या \frac{क}{२} = \sqrt{\frac{(सा - खा)(सा - गा)}{खा गा}}$$

$$(२) \text{ कोज्या } \frac{क}{२} = \sqrt{\frac{सा (सा - का)}{खा गा}}$$

$$\text{तथा (३) स्प } \frac{क}{२} = \sqrt{\frac{(सा - खा) (सा - गा)}{सा (सा - का)}}$$

$$(१) \text{ क्योंकि कोज्या क} = \frac{खा^२ + गा^२ - का^२}{२ खा गा}$$

$$\begin{aligned} \therefore १ - \text{कोज्या क} &= १ - \frac{खा^२ + गा^२ - का^२}{२ खा गा} \\ &= \frac{का^२ - (खा^२ + गा^२ - २ खा गा)}{२ खा गा} \\ &= \frac{का^२ - (खा - गा)^२}{२ खा गा} \\ &= \frac{(का - खा + गा) (का + खा - गा)}{२ खा गा} \dots (अ) \end{aligned}$$

अथ $२सा = का + खा + गा =$ त्रिभुज का परिमाण रखने पर

$$\begin{aligned} का - खा + गा &= (का + खा + गा) - २खा \\ &= २ सा - २ खा \\ &= २ (सा - खा) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} का + खा - गा &= (का + खा + गा) - २ गा \\ &= २ सा - २ गा \\ &= २ (सा - गा) \end{aligned}$$

$$\text{और } 1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{A}{2}$$

इसलिए सम्बन्ध (अ) इस रूप में लिखा जा सकता है—

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{2 (a - b) \cdot 2 (a - c)}{2 b c}$$

$$\text{अथवा, } \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{(a - b)(a - c)}{b c}$$

$$\therefore \sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{(a - b)(a - c)}{b c}}$$

पर्यन्त किसी भी त्रिभुज में,
सदा $A < 180^\circ$

$$\text{अतः सदा } \frac{A}{2} < 90^\circ$$

$\therefore \sin \frac{A}{2}$, $\cos \frac{A}{2}$, $\tan \frac{A}{2}$ की अर्थात् सदा धन होती हैं। अतः ऊपर के $\sin \frac{A}{2}$ के सूत्र में, और $\cos \frac{A}{2}$ और $\tan \frac{A}{2}$ के सूत्रों में धर्मात्मक का चिह्न सदा धन लिया जायगा।

$$\therefore \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(a - b)(a - c)}{b c}}$$

$$\text{इसी प्रकार ज्या } \frac{ख}{२} = \sqrt{\frac{(सा - गा) (सा - का)}{गा का}}$$

$$\text{और ज्या } \frac{ग}{२} = \sqrt{\frac{(सा - का) (सा - खा)}{का खा}}$$

$$\begin{aligned} (२) \quad १ + कोज्या क &= १ + \frac{खा^२ + गा^२ - का^२}{२ खा गा} \\ &= \frac{(खा^२ + गा^२ + २ खा गा) - का^२}{२ खा गा} \\ &= \frac{(खा + गा)^२ - का^२}{२ खा गा} \dots\dots\dots (गा) \\ &= \frac{(खा + गा + का) (खा + गा - का)}{२ खा गा} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{परंतु, } (खा + गा - का) &= (का + खा + गा) - २ का \\ &= २ सा - २ का = २ (सा - का) \end{aligned}$$

$$\text{और } १ + कोज्या क = २ कोज्या^२ \frac{क}{२}$$

इसलिए सम्यन्ध (२) इस रूप में लिखा जा सकता है,

$$२ कोज्या^२ \frac{क}{२} = \frac{२ सा.२ (सा - का)}{२ खा गा}$$

$$\text{अथवा कोज्या^२ } \frac{क}{२} = \frac{सा (सा - का)}{खा गा}$$

$$\therefore \text{ कोज्या } \frac{क}{२} = \sqrt{\frac{सा (सा - का)}{खा गा}}$$

$$\text{इसी प्रकार कोज्या } \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\text{सा (सा - खा)}}{\text{गा का}}}$$

$$\text{और कोज्या } \frac{ग}{2} = \sqrt{\frac{\text{सा (सा - गा)}}{\text{का खा}}}$$

$$(३) \text{ क्योंकि स्प } \frac{क}{२} = \frac{\text{ज्या } \frac{क}{२}}{\text{कोज्या } \frac{क}{२}}$$

$$\begin{aligned} \text{स्प } \frac{क}{२} &= \frac{\sqrt{\frac{(\text{सा - गा}) (\text{सा - खा})}{\text{खा गा}}}}{\sqrt{\frac{\text{मा (सा - का)}}{\text{खा गा}}}} \\ &= \sqrt{\frac{(\text{मा - खा}) (\text{सा - गा})}{\text{सा (सा - का)}}} \end{aligned}$$

१

[ऊपर के फलों से

$$\text{इसी प्रकार स्प } \frac{ख}{२} = \sqrt{\frac{(\text{सा - गा}) (\text{सा - का})}{\text{सा (सा - खा)}}}$$

$$\text{और स्प } \frac{ग}{२} = \sqrt{\frac{(\text{सा - का}) (\text{सा - खा})}{\text{सा (सा - गा)}}}$$

२

१०५ त्रिभुज के किसी भी कोण की ज्या को त्रिभुज की भुजाओं के पदों में व्यक्त करना ।

$$\text{ज्या क} = २ \text{ ज्या } \frac{क}{२} \text{ कोज्या } \frac{क}{२}$$

$$= 2 \sqrt{\frac{(सा - खा) (सा - गा)}{खा गा}} \times$$

$$\sqrt{\frac{सा (सा - का)}{खा गा}}$$

(गतानुच्छेद से)

$$= \frac{2}{खा गा} \sqrt{सा (सा - का) (सा - खा) (सा - गा)}$$

इसी प्रकार

$$\text{ज्या ख} = \frac{2}{गा.का} \sqrt{सा (सा - का) (सा - खा) (सा - गा)}$$

$$\text{और ज्या ग} = \frac{2}{का.खा} \sqrt{सा (सा - का) (सा - खा) (सा - गा)}$$

१०.६ किसी भी त्रिभुज कखग में

$$\text{स्प} \left(\frac{ख - ग}{2} \right) = \left(\frac{खा - गा}{खा + गा} \right) \text{कोस्प} \frac{क}{2}$$

$$\text{अथ, स्प} \left(\frac{ख - ग}{2} \right) \text{स्प} \frac{क}{2}$$

$$= \frac{\text{स्प} \frac{ख}{2} \text{स्प} \frac{क}{2} - \text{स्प} \frac{ग}{2} \text{स्प} \frac{क}{2}}$$

$$1 + \text{स्प} \frac{ख}{2} \text{स्प} \frac{ग}{2}$$

दक्षिण पक्ष

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{\frac{(\overline{\text{सा}} - \overline{\text{गा}})(\overline{\text{सा}} - \overline{\text{का}})}{\text{सा}(\overline{\text{सा}} - \overline{\text{खा}})}} \sqrt{\frac{(\overline{\text{सा}} - \overline{\text{खा}})(\overline{\text{सा}} - \overline{\text{गा}})}{\text{सा}(\overline{\text{सा}} - \overline{\text{का}})}}}{1 + \sqrt{\frac{(\overline{\text{सा}} - \overline{\text{गा}})(\overline{\text{सा}} - \overline{\text{का}})}{\text{सा}(\overline{\text{सा}} - \overline{\text{खा}})}} \sqrt{\frac{(\overline{\text{सा}} - \overline{\text{का}})(\overline{\text{सा}} - \overline{\text{खा}})}{\text{सा}(\overline{\text{सा}} - \overline{\text{गा}})}}} \\
 &= \frac{\sqrt{\frac{(\overline{\text{सा}} - \overline{\text{का}})(\overline{\text{सा}} - \overline{\text{खा}})}{\text{सा}(\overline{\text{सा}} - \overline{\text{गा}})}} \sqrt{\frac{(\overline{\text{सा}} - \overline{\text{खा}})(\overline{\text{सा}} - \overline{\text{गा}})}{\text{सा}(\overline{\text{सा}} - \overline{\text{का}})}}}{1 + \sqrt{\frac{(\overline{\text{सा}} - \overline{\text{गा}})(\overline{\text{सा}} - \overline{\text{का}})}{\text{सा}(\overline{\text{सा}} - \overline{\text{खा}})}} \sqrt{\frac{(\overline{\text{सा}} - \overline{\text{का}})(\overline{\text{सा}} - \overline{\text{खा}})}{\text{सा}(\overline{\text{सा}} - \overline{\text{गा}})}}} \\
 &= \frac{\frac{\overline{\text{सा}} - \overline{\text{गा}}}{\text{सा}} - \frac{\overline{\text{सा}} - \overline{\text{खा}}}{\text{सा}}}{1 + \frac{\overline{\text{सा}} - \overline{\text{का}}}{\text{सा}}} = \frac{(\overline{\text{सा}} - \overline{\text{गा}}) - (\overline{\text{सा}} - \overline{\text{खा}})}{2\overline{\text{सा}} - \overline{\text{का}}} \\
 &= \frac{\overline{\text{खा}} - \overline{\text{गा}}}{2\overline{\text{सा}} - \overline{\text{का}}} = \frac{\overline{\text{खा}} - \overline{\text{गा}}}{\overline{\text{खा}} + \overline{\text{गा}}} \\
 &\quad \quad \quad (2\overline{\text{सा}} = \overline{\text{का}} + \overline{\text{खा}} + \overline{\text{गा}})
 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{स्प}\left(\frac{\overline{\text{ख}} - \overline{\text{ग}}}{2}\right) = \left(\frac{\overline{\text{खा}} - \overline{\text{गा}}}{\overline{\text{खा}} + \overline{\text{गा}}}\right) \text{कोस्प}\frac{\overline{\text{क}}}{2}$$

$$\text{इसी प्रकार स्प}\left(\frac{\overline{\text{ग}} - \overline{\text{क}}}{2}\right) = \left(\frac{\overline{\text{गा}} - \overline{\text{का}}}{\overline{\text{गा}} + \overline{\text{का}}}\right) \text{कोस्प}\frac{\overline{\text{ख}}}{2}$$

$$\text{स्प}\left(\frac{\overline{\text{क}} - \overline{\text{ख}}}{2}\right) = \left(\frac{\overline{\text{का}} - \overline{\text{खा}}}{\overline{\text{का}} + \overline{\text{खा}}}\right) \text{कोस्प}\frac{\overline{\text{ग}}}{2}$$

उदाहरण— $\left(\frac{\text{खा}-\text{गा}}{\text{खा}+\text{गा}}\right)$ को कोणों की निष्पत्तियों के पदों में

$$\text{व्यक्त कर स्प}\left(\frac{\text{ख}-\text{ग}}{2}\right) = \left(\frac{\text{खा}-\text{गा}}{\text{खा}+\text{गा}}\right)\text{स्प}\frac{\text{क}}{2}$$

आदि संबंधों को सिद्ध करो।

१०७ त्रिभुज की भुजाओं और कोणों में कई ऐकात्म्य हैं। भुजाओं को कोणों की निष्पत्तियों के व्यक्त करने से अथवा कोणों की निष्पत्तियों को भुजाओं के पदों में व्यक्त करने से ये ऐकात्म्य सिद्ध किये जा सकते हैं।

उदाहरण १— सिद्ध करो कि \triangle कलम में,

$$\text{खा}^2\text{ज्या } 2\text{ग} + \text{गा}^2\text{ज्या } 2\text{ख} = 2\text{खा. गा. ज्या क}$$

$$\begin{aligned}\text{चाम पक्ष} &= 2\text{खा}^2\text{ज्या ग. कोज्या ग} \\ &\quad + 2\text{गा}^2\text{ज्या ख. कोज्या ख}\end{aligned}$$

$$\text{मान लो } \frac{\text{ज्या क}}{\text{का}} = \frac{\text{ज्या ख}}{\text{खा}} = \frac{\text{ज्या ग}}{\text{गा}} = \text{न}$$

$$\text{अतः ज्या क} = \text{का. न, ज्या ख} = \text{खा. न, ज्या ग} = \text{गा. न}$$

$$\begin{aligned}\text{तो चामपक्ष} &= 2\text{खा}^2. \text{गा. न. कोज्या ग} \\ &\quad + 2\text{गा}^2. \text{खा. न. कोज्या ख} \\ &= 2\text{खा गा न (खा. कोज्या ग} + \text{गा. कोज्या ख)} \\ &= 2\text{खा गा न. का} \quad (\text{मनुच्छेद १०-३से})\end{aligned}$$

$$= 2 \text{ खा. गा. (का. न)} = 2 \text{ खा. गा. ज्या क} \\ = \text{दक्षिण पक्ष}$$

उदाहरण २— सिद्ध करो कि किसी भी \triangle कलम में

$$(\text{खा} + \text{गा} - \text{का}) \left(\text{कोस्प} \frac{\text{ख}}{2} + \text{कोस्प} \frac{\text{ग}}{2} \right) = 2 \text{ का} \cdot \text{कोस्प} \frac{\text{क}}{2}$$

$$\text{अथ कोस्प} \frac{\text{ख}}{2} = \frac{1}{\text{स्प} \frac{\text{ख}}{2}} = \sqrt{\frac{\text{सा} (\text{सा} - \text{खा})}{(\text{सा} - \text{गा}) (\text{सा} - \text{का})}}$$

(अनुच्छेद १०४ से)

$$\text{इसलिए कोस्प} \frac{\text{ग}}{2} = \frac{1}{\text{स्प} \frac{\text{ग}}{2}} = \sqrt{\frac{\text{सा} (\text{सा} - \text{गा})}{(\text{सा} - \text{का}) (\text{सा} - \text{खा})}}$$

$$\begin{aligned} \text{और } (\text{खा} + \text{गा} - \text{का}) &= (\text{का} + \text{खा} + \text{गा}) - 2 \text{ का} \\ &= 2 \text{ सा} - 2 \text{ का} = 2 (\text{सा} - \text{का}) \end{aligned}$$

$$\therefore (\text{खा} + \text{गा} - \text{का}) \left(\text{कोस्प} \frac{\text{ख}}{2} + \text{कोस्प} \frac{\text{ग}}{2} \right)$$

$$= 2 (\text{सा} - \text{का}) \left\{ \sqrt{\frac{\text{सा} (\text{सा} - \text{खा})}{(\text{सा} - \text{गा}) (\text{सा} - \text{का})}} \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{\text{सा} (\text{सा} - \text{गा})}{(\text{सा} - \text{खा}) (\text{सा} - \text{का})}} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 (\text{सा} - \text{का}) \sqrt{\frac{\text{सा}}{(\text{सा} - \text{का})}} \times \\
&\quad \left\{ \sqrt{\frac{(\text{सा} - \text{खा})}{(\text{सा} - \text{गा})}} + \sqrt{\frac{(\text{सा} - \text{गा})}{(\text{सा} - \text{खा})}} \right\} \\
&= 2 \sqrt{\text{सा}(\text{सा} - \text{का})} \times \\
&\quad \frac{(\text{सा} - \text{खा}) + (\text{सा} - \text{गा})}{\sqrt{(\text{सा} - \text{खा})(\text{सा} - \text{गा})}} \\
&= 2 \sqrt{\text{सा}(\text{सा} - \text{का})} \times \frac{\text{का}}{\sqrt{(\text{सा} - \text{खा})(\text{सा} - \text{गा})}} \\
&= 2\text{का} \frac{\text{कोस्प} \frac{\text{क}}{2}}{2}
\end{aligned}$$

अन्यथा

भुजाओं को कोणों की निष्पत्तियों के पदों में व्यक्त करने से भी यह ऐकात्म्य सिद्ध किया जा सकता है।

अनुच्छेद १०२ से

$$\begin{aligned}
\frac{\text{खा} + \text{गा} - \text{का}}{2\text{का}} &= \frac{\text{ज्या ख} + \text{ज्या ग} - \text{ज्या क}}{2\text{ज्या क}} \\
&= \frac{2\text{ज्या} \frac{\text{ख} + \text{ग}}{2} \text{कोज्या} \frac{\text{ख} - \text{ग}}{2} - 2\text{ज्या} \frac{\text{क}}{2} \text{कोज्या} \frac{\text{क}}{2}}{2\text{ज्या क}}
\end{aligned}$$

$$\text{परन्तु } \frac{\text{ख} + \text{ग}}{२} = \frac{\text{प्या}}{२} - \frac{\text{क}}{२}$$

$$\therefore \text{ज्या } \frac{\text{ख} + \text{ग}}{२} = \text{कोज्या } \frac{\text{क}}{२}$$

$$\text{और ज्या } \frac{\text{क}}{२} = \text{कोज्या } \frac{\text{ख} + \text{ग}}{२}$$

$$\therefore \frac{\text{खा} + \text{गा} - \text{का}}{२\text{का}}$$

$$= \frac{२\text{कोज्या } \frac{\text{क}}{२} \cdot \text{कोज्या } \frac{\text{ख} - \text{ग}}{२} - २\text{कोज्या } \frac{\text{ख} + \text{ग}}{२} \cdot \text{कोज्या } \frac{\text{क}}{२}}{२\text{ज्या } \frac{\text{क}}{२}}$$

$$= \frac{२\text{कोज्या } \frac{\text{क}}{२} \left(\text{कोज्या } \frac{\text{ख} - \text{ग}}{२} - \text{कोज्या } \frac{\text{ख} + \text{ग}}{२} \right)}{४\text{ज्या } \frac{\text{क}}{२} \cdot \text{कोज्या } \frac{\text{क}}{२}}$$

$$= \frac{२\text{कोज्या } \frac{\text{क}}{२} \cdot २\text{ज्या } \frac{\text{ख}}{२} \cdot \text{ज्या } \frac{\text{ग}}{२}}{४\text{ज्या } \frac{\text{क}}{२} \cdot \text{कोज्या } \frac{\text{क}}{२}}$$

$$= \frac{\text{ज्या } \frac{\text{ख}}{२} \cdot \text{ज्या } \frac{\text{ग}}{२}}{\text{ज्या } \frac{\text{क}}{२}}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{और } \frac{\cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2}} \\
 &= \frac{\cos \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}{\sin \frac{C}{2} \left(\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2} \right)} \\
 &= \frac{\cos \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}{\sin \frac{C}{2} \sin \frac{A+B}{2}} \\
 &= \frac{\cos \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}{\sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}} \\
 &= \frac{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{C}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\text{इसलिए } \frac{a + b - c}{2a} = \frac{\cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2}}$$

$$\text{अतः एव (खा + गा - का) (कोस्प } \frac{\text{ख}}{2} + \text{कोस्प } \frac{\text{ग}}{2})$$

$$= 2 \text{ का. कोस्प } \frac{\text{क}}{2}$$

उदाहरण ३— यदि का^२, खा^२, और गा^२ समांतर श्रेढी में हो तो सिद्ध करो कि कोस्प क, कोस्प ख और कोस्प ग की अर्धांश भी समांतर श्रेढी में होंगी।

यह सिद्ध करना है कि

$$\text{कोस्प ख} - \text{कोस्प क} = \text{कोस्प ग} - \text{कोस्प ख}$$

$$\text{अथवा कोस्प क} + \text{कोस्प ग} = 2 \text{ कोस्प ख}$$

और यह तब सत्य होगा

$$\text{जब } \frac{\text{कोज्या क}}{\text{ज्या क}} + \frac{\text{कोज्या ग}}{\text{ज्या ग}} = 2 \cdot \frac{\text{कोज्या ख}}{\text{ज्या ख}}$$

$$\text{अर्थात् जब } \frac{\text{कोज्या क}}{\text{का}} + \frac{\text{कोज्या ग}}{\text{गा}} = \frac{2 \text{ कोज्या ख}}{\text{खा}} \quad (\text{अनुच्छेद १०.२ से})$$

$$\text{अर्थात् जब } \frac{\text{गा. कोज्या क} + \text{का. कोज्या ग}}{\text{का. गा}} = \frac{2 \text{ कोज्या ख}}{\text{खा}}$$

$$\text{अर्थात् जब } \frac{\text{खा}}{\text{का. गा}} = \frac{2 \text{ कोज्या ख}}{\text{खा}} \quad (\text{अनुच्छेद १०.३ से})$$

$$\text{अर्थात् जब } \text{खा}^2 = 2 \text{ का. गा. कोज्या ख}$$

$$\text{अर्थात् जब } \text{खा}^2 = \text{गा}^2 + \text{का}^2 - \text{खा}^2 \quad (\text{अनुच्छेद १०.२१ से})$$

$$\text{अर्थात् जब } 2 \text{ खा}^2 = \text{गा}^2 + \text{का}^2$$

का^२, खा^२ और गा^२ समान्तर श्रेढी में हैं अतः यह सम्बन्ध सत्य है।

∴ कोस्य क, कोस्य ख और कोस्य ग समान्तर श्रेढी में हैं।

प्रश्नावलि १५

सिद्ध करो कि किसी भी त्रिभुज कखग में

$$(१) \text{ का कोज्या } \frac{\text{ख} - \text{ग}}{२} = (\text{खा} + \text{गा}) \text{ ज्या } \frac{\text{क}}{२}$$

$$(२) \frac{\text{का}^२ \text{ ज्या } (\text{ख} - \text{ग})}{\text{ज्या क}} + \frac{\text{खा}^२ \text{ ज्या } (\text{ग} - \text{क})}{\text{ज्या ख}} + \frac{\text{गा}^२ \text{ ज्या } (\text{क} - \text{ख})}{\text{ज्या ग}} = ०$$

[नागपुर १९२६]

$$(३) \text{ का.ज्या क} - \text{खा.ज्या ख} = \text{गा.ज्या } (\text{क} - \text{ख})$$

[नागपुर १९४३]

$$(४) \text{ यदि ग कोई भी एक कोण हो तो } \text{खा.कोज्या अ} = \text{गा.कोज्या } (\text{क} - \text{अ}) + \text{का.कोज्या } (\text{क} + \text{अ})$$

[नागपुर १९४२]

$$(५) (\text{का} - \text{खा} + \text{गा}) \text{ स्प } \frac{\text{ख}}{२} = (\text{का} + \text{खा} - \text{गा}) \text{ स्प } \frac{\text{ग}}{२}$$

[नागपुर १९४०]

$$(६) \quad \text{ख} \frac{\text{ग}}{२} - \text{स्प} \frac{\text{ग}}{२} = \frac{\text{खा} + \text{गा} - \text{का}}{\text{खा} + \text{गा} + \text{का}} \quad [\text{नागपुर १९२४}]$$

$$(७) \quad (\text{का} + \text{खा} + \text{गा}) \left(\text{स्प} \frac{\text{क}}{२} + \text{स्प} \frac{\text{ख}}{२} \right) = २ \text{ गा.कोस्प} \frac{\text{ग}}{२}$$

$$(८) \quad \text{का.ज्या} (\text{ख} - \text{ग}) + \text{खा.ज्या} (\text{ग} - \text{क}) \\ + \text{गा.ज्या} (\text{क} - \text{ख}) = ० \\ [\text{चंयई १९३८}]$$

$$(९) \quad \frac{\text{का}^२ \text{ज्या} (\text{ख} - \text{ग})}{\text{ज्या ख} + \text{ज्या ग}} + \frac{\text{खा}^२ \text{ज्या} (\text{ग} - \text{क})}{\text{ज्या ग} + \text{ज्या क}} \\ + \frac{\text{गा}^२ \text{ज्या} (\text{क} - \text{ख})}{\text{ज्या क} + \text{ज्या ख}} = ० \\ [\text{चंयई १९४१}]$$

$$(१०) \quad \frac{\text{ज्या} (\text{क} - \text{ख})}{\text{ज्या} (\text{क} + \text{ख})} = \frac{\text{का}^२ - \text{खा}^२}{\text{गा}^२} \quad [\text{इलाहाबाद १९४१}]$$

$$(११) \quad (\text{खा} - \text{गा}) \text{कोस्प} \frac{\text{क}}{२} + (\text{गा} - \text{का}) \text{कोस्प} \frac{\text{ख}}{२} \\ + (\text{का} - \text{खा}) \text{कोस्प} \frac{\text{ग}}{२} = ० \\ [\text{पटना १९४४}]$$

$$(१२) \quad (\text{खा} - \text{गा}) \text{कोज्या} \frac{\text{क}}{२} = \text{का ज्या} \frac{\text{ख} - \text{ग}}{२} \\ [\text{पटना १९४२}]$$

- (१३) यदि त्रिभुज कखग की भुजाएं इस प्रकार हों कि
 $२\text{खा}^२ = \text{का}^२ + \text{गा}^२$ तो दिखाओ कि

$$\frac{\text{ज्या ३ ख}}{\text{ज्या ख}} = \left(\frac{\text{का}^२ - \text{गा}^२}{२\text{का.गा}} \right)^२$$

[नागपुर १९४६]

- (१४) यदि त्रिभुज कखग में, का कोज्या क = खा. कोज्या ख,
 तो सिद्ध करो कि, का = खा, अथवा ग लंबकोण है।

[इलाहाबाद १९४२]

- (१५) यदि त्रिभुज कखग में, कोज्या ख = $\frac{\text{ज्या क}}{२\text{ज्या ग}}$ तो सिद्ध
 करो कि कखग द्विसमत्रिभुज है।

[धनारस १९४४]

- (१६) यदि किसी त्रिभुज की भुजाएं समांतर श्रेणी में हों तो
 सिद्ध करो कि उसके अर्धकोणों की कोटिस्पर्शज्याएं
 भी समांतर श्रेणी में होंगी।

- (१७) यदि त्रिभुज कखग में, $\text{स्प } \frac{\text{क}}{२} = \frac{५}{६}$ और $\text{स्प } \frac{\text{ख}}{२} = \frac{२०}{३७}$,

तो $\text{स्प } \frac{\text{ग}}{२}$ की अर्धा निश्चित करो और सिद्ध करो कि
 $\text{का} + \text{गा} = २\text{खा}$

[नागपुर १९४२]

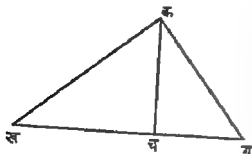
- (१८) त्रिभुज कखग में, आधार खग पर च एक ऐसा बिंदु है
 कि $\frac{\text{खच}}{\text{चग}} = \frac{\text{म}}{\text{न}}$, और $\angle \text{राकच} = ३$, $\angle \text{चकग} = ६$

तथा $\angle \text{गचक} = ३$, तो सिद्ध करो कि
 $(\text{म} + \text{न}) \text{कोस्प अ} = \text{म कोस्प इ} - \text{न कोस्प ई}$
 $= \text{न कोस्प ख} - \text{म कोस्प ग}$

ग्यारहवां अध्याय

त्रिभुज के गुणधर्म (properties)

११.१ त्रिभुज का क्षेत्रफल—



आ ११.१

मान लो चिह्न Δ से
त्रिभुज का क्षेत्रफल
दर्शाया गया है।
खग रेखा पर कच
लंब खींचो।

$$\text{तो } \Delta = \frac{1}{2} (\text{आधार} \times \text{उच्छ्राय}) (\text{base} \times \text{altitude})$$

$$= \frac{1}{2} \text{खग.कच}$$

$$= \frac{1}{2} \text{खग.कख ज्या ख}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \text{का.गा.ज्या ख}$$

$$= \frac{1}{2} \text{का.खा.ज्या ग} \quad (\because \text{गा.ज्या ख} = \text{खा.ज्या ग})$$

$$= \frac{1}{2} \text{खा.गा.ज्या क} \quad (\because \text{का.ज्या ग} = \text{गा.ज्या क})$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \text{खा.गा.ज्या क} = \frac{1}{2} \text{गा.का.ज्या ख} = \frac{1}{2} \text{का.खा.ज्या ग}$$

इस प्रकार $\Delta = \frac{1}{2}$ (दो भुजाओं का गुणनफल)

\times (उनके अंतर्गत कोण की ज्या)

$$\text{पुनः } \Delta = \frac{1}{2} \text{खा.गा.ज्या क}$$

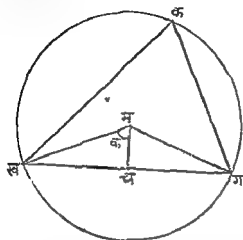
$$= \text{खा.गा.ज्या} \frac{\text{क}}{2} \cdot \text{कोज्या} \frac{\text{क}}{2}$$

$$= \text{खा.गा.} \sqrt{\frac{(\text{सा} - \text{खा})(\text{सा} - \text{गा})}{\text{खा.गा}}} \sqrt{\frac{\text{सा}(\text{सा} - \text{का})}{\text{खा.गा}}}$$

$$= \sqrt{\text{सा.}(\text{सा} - \text{का}) \cdot (\text{सा} - \text{खा}) \cdot (\text{सा} - \text{गा})}$$

यह सूत्र त्रिभुज का क्षेत्रफल भुजाओं के पदों में व्यक्त करता है।

११.२ किसी त्रिभुज के परिवेष्टी वृत्त (circumscribing circle) की त्रिज्या —



मान लो कि त्रिभुज
कखग के परिवेष्टी
वृत्त की त्रिज्या 'क'
और केन्द्र 'म' है।

सा. ११.२

∠खमग की अर्धन-रेखा (bisecting line) मच सींचो
जो रेखा खग का भी मध्य कोण पर अर्धन (bisect) करती है।

रेखिकी से केन्द्र 'म' पर बना कोण ∠खमग

$$= 2 \angle खकग$$

$$= 2 क$$

$$\therefore \angle खमच = \frac{1}{2} \angle खमग = क$$

$$\text{अथ } खच = खम.ज्या खमच$$

$$\text{परन्तु } खच = \frac{क}{2}$$

$$\text{और } खम = क$$

$$\frac{का}{२} = त्रिज्या क$$

$$त्रिज्या = \frac{का}{२}$$

$$इसी प्रकार त्रिज्या ख = \frac{खा}{२}$$

$$\text{और त्रिज्या ग} = \frac{गा}{२}$$

$$\frac{का}{२} = \frac{खा}{२} = \frac{गा}{२} = त्रिज्या$$

किसी भी त्रिभुज के परिवेक्षी वृत्त को परिवृत्त (circum circle), उसके केंद्र को परिवेक्षी केंद्र (circum centre) और उस की त्रिज्या को परिवेक्षी त्रिज्या (circum radius) कहते हैं।

उपप्रेम —

$$का = २ त्रिज्या क,$$

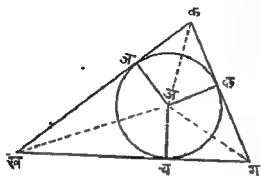
$$खा = २ त्रिज्या ख,$$

$$गा = २ त्रिज्या ग$$

११२१ परिवेक्षी त्रिज्या की भुजाओं के पदों में व्यक्त कर सकते हैं।

$$\begin{aligned} त्रिज्या &= \frac{का}{२} = \frac{का खा गा}{२ खा गा त्रिज्या क} \\ &= \frac{का खा गा}{४ \Delta} \quad (\text{अनुच्छेद १११ से}) \end{aligned}$$

११.३ किसी भी त्रिभुज में अंतर्लिखित वृत्त (inscribed circle) की त्रिज्या निकालना—



आ. ११.३

मान लो कि त्रिभुज 'कखग' में अंतर्लिखित वृत्त का केन्द्र 'ज' है और वृत्त और भुजाओं के संस्पर्श-बिंदु (points of contact) 'च', 'छ', 'ज' हैं तो भज, भछ, भज रेखाएं त्रिभुज

की भुजाओं पर लम्ब होंगी। अब इनमें से प्रत्येक की लम्बाई वृत्त की त्रिज्या 'र' के सम है।

क्योंकि $\triangle कखग$ का क्षेत्रफल

= $\triangle खभग$, $\triangle गभक$ और $\triangle कभख$ के क्षेत्र-फलों का योग

$$\therefore \triangle = \frac{1}{2} खग.भच + \frac{1}{2} गक.भछ + \frac{1}{2} कख.भज$$

$$= \frac{1}{2} का.त्र + \frac{1}{2} कग.त्र + \frac{1}{2} गख.त्र$$

$$= \frac{1}{2} \text{त्र (का + खा + गा)}$$

$$= \text{त्र. सा} \quad (\because \text{का} + \text{खा} + \text{गा} = 2\text{सा})$$

$$\therefore \text{त्र} = \frac{\Delta}{\text{सा}}$$

त्रिभुज में अंतर्लिखित वृत्त को अंतर्वृत्त (incircle), उसके केन्द्र को अंतःकेन्द्र (incentre) और उसकी त्रिज्या को अंतस्त्रिज्या (inradius) कहते हैं।

टिप्पणी— अंतःकेन्द्र से शीर्षों की दूरियां।

Δ का अक्ष से अक्ष = अक्ष व्युज्ज्या अक्षज

$$\therefore \text{अक्ष} = \text{त्र. व्युज्ज्या} \frac{\text{क}}{2}$$

$$\text{इसी प्रकार, अख} = \text{त्र. व्युज्ज्या} \frac{\text{ख}}{2}$$

$$\text{और अग} = \text{त्र. व्युज्ज्या} \frac{\text{ग}}{2}$$

११.३१ त्र के अन्य इयंजक—

गतानुच्छेद की आकृति में, कोणों की अर्धच्छेदी रेखाओं का मिथदछेदन बिंदु (point of intersection) अ है।

$$\text{इसलिए } \angle \text{अखच} = \frac{\text{ख}}{2}, \angle \text{अगच} = \frac{\text{ग}}{2}$$

∴ त्रिभुज असलच और गगच से,

$$\text{खच} = \text{त्र कोस्य} \frac{\text{ख}}{2}, \text{गच} = \text{त्र कोस्य} \frac{\text{ग}}{2}$$

$$\text{अब, खच} + \text{गच} = \text{खग} = \text{का}$$

$$\therefore \text{त्र} \left(\text{कोस्य} \frac{\text{ख}}{2} + \text{कोस्य} \frac{\text{ग}}{2} \right) = \text{का}$$

$$\text{अथवा } \frac{\text{त्र} \left(\text{कोज्या} \frac{\text{ख}}{2} \text{ज्या} \frac{\text{ग}}{2} + \text{कोज्या} \frac{\text{ग}}{2} \text{ज्या} \frac{\text{ख}}{2} \right)}{\text{ज्या} \frac{\text{ख}}{2} \text{ज्या} \frac{\text{ग}}{2}} = \text{का}$$

$$\text{अथवा त्र ज्या} \left(\frac{\text{ख} + \text{ग}}{2} \right) = \text{का ज्या} \frac{\text{ख}}{2} \text{ज्या} \frac{\text{ग}}{2}$$

$$\text{परंतु } \frac{\text{ख} + \text{ग}}{2} = 90^\circ - \frac{\text{क}}{2}$$

$$\therefore \text{ज्या} \frac{\text{ख} + \text{ग}}{2} = \text{कोज्या} \frac{\text{क}}{2}$$

$$\therefore \text{त्र} = \frac{\text{का ज्या} \frac{\text{ख}}{2} \text{ज्या} \frac{\text{ग}}{2}}{\text{कोज्या} \frac{\text{क}}{2}}$$

$$\text{परंतु का} = 2 \text{ त्र ज्या क} = 4 \text{ त्र ज्या} \frac{\text{क}}{2} \text{ कोज्या} \frac{\text{क}}{2}$$

$$\therefore \text{त्र} = ४ \text{त्रा ज्या } \frac{\text{क}}{२} \text{ज्या } \frac{\text{ख}}{२} \text{ज्या } \frac{\text{ग}}{२}$$

वैकल्पिक रीति (alternative method)—

$$\begin{aligned} \text{त्र} &= \frac{\Delta}{\text{सा}} = \frac{२ \Delta}{\text{का} + \text{खा} + \text{गा}} \\ &= \frac{\text{खा गा ज्या क}}{\text{का} + \text{खा} + \text{गा}} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{त्र} = \frac{२ \text{त्रा ज्या ख. } २ \text{त्रा ज्या ग. ज्या क}}{२ \text{त्रा (ज्या क} + \text{ज्या ख} + \text{ज्या ग})}$$

(अनुच्छेद ११.२, उपप्रमय)

$$= \frac{२ \text{त्रा ज्या क ज्या ख ज्या ग}}{\text{ज्या क} + \text{ज्या ख} + \text{ज्या ग}}$$

परन्तु अनुच्छेद ९.२ के उदाहरण १ से
ज्या क + ज्या ख + ज्या ग

$$= ४ \text{ कोज्या } \frac{\text{क}}{२} \text{ कोज्या } \frac{\text{ख}}{२} \text{ कोज्या } \frac{\text{ग}}{२}$$

$$\therefore \text{त्र} = \frac{१६ \text{त्रा ज्या } \frac{\text{क}}{२} \text{ कोज्या } \frac{\text{क}}{२} \text{ ज्या } \frac{\text{ख}}{२} \text{ कोज्या } \frac{\text{ख}}{२} \text{ ज्या } \frac{\text{ग}}{२} \text{ कोज्या } \frac{\text{ग}}{२}}{४ \text{ कोज्या } \frac{\text{क}}{२} \text{ कोज्या } \frac{\text{ख}}{२} \text{ कोज्या } \frac{\text{ग}}{२}}$$

$$= ४ \text{त्रा ज्या } \frac{\text{क}}{२} \text{ ज्या } \frac{\text{ख}}{२} \text{ ज्या } \frac{\text{ग}}{२}$$

११.३२ त्र के लिए एक और व्यंजक—

अनुच्छेद ११.३ की व्याप्ति में, रेखाएं खच और खज, एक ही विन्दु ख से खींची गई, अंतर्वृत्त की दो स्पर्श रेखाएं हैं

$$\therefore \text{खच} = \text{खज}$$

$$\text{इसी प्रकार गच} = \text{गछ}$$

$$\text{और कछ} = \text{कज}$$

$$\text{अब परिमाण रसा} = (\text{कछ} + \text{कज}) + (\text{खज} + \text{खच}) \\ + (\text{गच} + \text{गछ})$$

$$\therefore \text{सा} = \text{कज} + \text{खच} + \text{चग} = \text{कज} + \text{का}$$

$$\therefore \text{कज} = \text{सा} - \text{का}$$

अब जिभज कजज में

$$\frac{\text{अज}}{\text{कज}} = \text{स्प} \frac{\text{क}}{२}$$

$$\therefore \text{अ} = \text{कज स्प} \frac{\text{क}}{२}$$

$$\text{अ} = (\text{सा} - \text{का}) \text{स्प} \frac{\text{क}}{२}$$

$$\text{इसी प्रकार, अ} = (\text{सा} - \text{खा}) \text{स्प} \frac{\text{ख}}{२}$$

$$\text{अ} = (\text{सा} - \text{गा}) \text{स्प} \frac{\text{ग}}{२}$$

वैकल्पिक रीति—

$$r = \frac{\Delta}{sa}$$

$$= \frac{\sqrt{sa(sa - ka)(sa - xa)(sa - ga)}}{sa}$$

$$= \sqrt{\frac{(sa - ka)(sa - xa)(sa - ga)}{sa}}$$

$$= (sa - ka) \sqrt{\frac{(sa - xa)(sa - ga)}{sa(sa - ka)}}$$

$$= (sa - ka) \operatorname{स्प} \frac{k}{2}$$

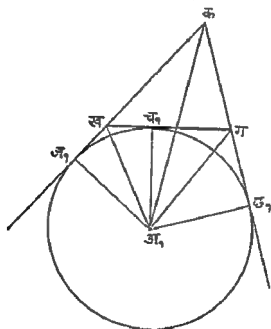
$$\text{इसी प्रकार } r = (sa - xa) \operatorname{स्प} \frac{x}{2}$$

$$\text{और } r = (sa - ga) \operatorname{स्प} \frac{g}{2}$$

११.४ यदि कोई वृत्त किसी त्रिभुज की एक भुजा का और अन्य दो वर्धित भुजाओं का स्पर्श करता हो तो वह वृत्त वहिलिखित वृत्त (exscribed circle) कहलाता है। इस प्रकार प्रत्येक त्रिभुज कखग के तीन वहिलिखित वृत्त होते हैं। प्रथम, जो खग भुजा का और कख, कग वर्धित भुजाओं का स्पर्श करता है; दूसरा जो गक भुजा का और खग, खक

वर्धित भुजाओं का स्पर्श करता है और तीसरा जो कख भुजा का और गक, गख वर्धित भुजाओं का स्पर्श करता है। वहिलिखित वृत्तों को वहिर्वृत्त (excircles), उनके केन्द्रों को वहिःकेन्द्र (excentres) और उनकी त्रिज्याओं को वहिस्त्रिज्याएं (exradii) कहते हैं।

११.४१ त्रिभुज कखग के वहिर्वृत्तोंकी त्रिज्याएं—



आ. ११-४

मान लो कि जो वहिर्वृत्त खग भुजा का और कख और कग वर्धित भुजाओं का स्पर्श करता है, उसका केन्द्र अ, और

उसकी त्रिज्या z_1 है; और इस वृत्त और खग, कख, के रेखाओं के संस्पर्श बिन्दु क्रमशः च₁, छ₁, और ज₁ हैं। इन बिन्दुओं को अ₁ से मिलाने वाली रेखाएं क्रमशः इन भुजाओं पर लम्ब होंगी।

और $अ, च, = अ, छ, = अ, ज, = z_1$,

अथ Δ कखग $= \Delta अ, कख + \Delta अ, गक - \Delta अ, खग$

$$\text{अथवा } \Delta = \frac{1}{2} गा अ, + \frac{1}{2} खा अ, - \frac{1}{2} का अ,$$

$$= \frac{1}{2} अ, (गा + खा - का)$$

$$= \frac{1}{2} अ, (2सा - 2का) = अ, (सा - का)$$

∴

$$\therefore अ, = \frac{\Delta}{सा - का}$$

इसी प्रकार यदि कोण ख और ग के सम्मुख बहिर्वृत्तों की त्रिज्याएं क्रमशः z_2 और z_3 हों, तो

$$z_2 = \frac{\Delta}{सा - खा}$$

$$z_3 = \frac{\Delta}{सा - गा}$$

टिप्पणी:—बहिष्केंद्रों से शीर्षों की दूरियां

Δ कभ, ज, से,

अ, क = अ, ज, व्युज्ज्या अ, कज,

$$\therefore \text{अ, क} = \text{अ, ज, व्युज्ज्या } \frac{\text{क}}{2}$$

इसी प्रकार $\text{अ, ख} = \text{अ, व्युज्ज्या } \frac{\text{ख}}{2}$

और $\text{अ, ग} = \text{अ, व्युत्कोज्या } \frac{\text{ग}}{2}$

इसी प्रकार कोण ख और ग के सम्मुख बहिष्केंद्रों अ₁, अ₂ से शीर्षों की दूरियां निकाली जा सकती हैं।

इसके अतिरिक्त

$$\angle \text{खअ, ग} = \angle \text{खअ, च,} + \angle \text{गअ, च,}$$

क्योंकि ख च, अ, एक लम्बकोण त्रिभुज है,

$$\begin{aligned} \therefore \angle \text{खअ, च,} &= 90^\circ - \text{अ, खच,} \\ &= 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{\text{ख}}{2} \right) \\ &= \frac{\text{ख}}{2} \end{aligned}$$

इसी प्रकार $\angle \text{गअ, च,} = \frac{\text{ग}}{2}$

$$\therefore \angle \text{खअ, ग} = \frac{\text{ख}}{2} + \frac{\text{ग}}{2}$$

$$= 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

इसी प्रकार $\angle गअ,क = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$,

और $\angle कअ,ख = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$

११.४२ चतुर्भुजों के अन्य व्यंजक—

पिछले अनुच्छेद की आकृति में बिंदु अ, बहिष्कोण (exterior angles) ख और ग के अर्धच्छेदी रेखाओं का मध्यच्छेदन बिंदु है।

$$\therefore \angle अ,खच, = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

$$\angle अ,गच, = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$$\begin{aligned} \triangle अ,खच, से, \quad खच, &= अ, कोस्य \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \\ &= अ, स्प \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

और $\triangle अ,गच, से,$

$$गच, = अ, कोस्य \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = अ, स्प \frac{\alpha}{2}$$

परंतु $खच, + गच, = गख = का$

$$\therefore अ, \left(स्प \frac{\alpha}{2} + स्प \frac{\alpha}{2} \right) = का$$

$$\text{अथवा प्र, ज्या } \left(\frac{\text{ख} + \text{ग}}{2} \right) = \text{का कोज्या } \frac{\text{ख}}{2} \text{ कोज्या } \frac{\text{ग}}{2}$$

$$\therefore \text{प्र,} = \frac{\text{का.कोज्या } \frac{\text{ख}}{2} \text{ कोज्या } \frac{\text{ग}}{2}}{\text{कोज्या } \frac{\text{क}}{2}}$$

$$\left(\because \text{ज्या } \frac{\text{ख} + \text{ग}}{2} \text{ कोज्या } \frac{\text{क}}{2} \right)$$

$$\text{अथ, का} = 2 \text{ प्रा.ज्या क}$$

$$= 4 \text{ प्रा.ज्या } \frac{\text{क}}{2} \cdot \text{कोज्या } \frac{\text{क}}{2}$$

$$\therefore \text{प्र,} = 4 \text{ प्रा.ज्या } \frac{\text{क}}{2} \text{ कोज्या } \frac{\text{ख}}{2} \cdot \text{कोज्या } \frac{\text{ग}}{2}$$

$$\text{सी प्रकार, प्र,} = 4 \text{ प्रा.कोज्या } \frac{\text{क}}{2} \cdot \text{ज्या } \frac{\text{ख}}{2} \cdot \text{कोज्या } \frac{\text{ग}}{2}$$

$$\text{और प्र,} = 4 \text{ प्रा कोज्या } \frac{\text{क}}{2} \text{ कोज्या } \frac{\text{ख}}{2} \text{ ज्या } \frac{\text{ग}}{2}$$

वैकल्पिक रीति—

$$\text{प्र,} = \frac{\Delta}{\text{सा} - \text{का}} = \frac{2 \Delta}{2\text{सा} - 2\text{का}}$$

$$= \frac{\text{खा.गा.ज्या क}}{\text{सा} + \text{गा} - \text{का}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2 \text{ त्रा ज्या ख. } 2 \text{ त्रा ज्या ग. ज्या क}}{2 \text{ त्रा. (ज्या ख + ज्या ग - ज्या क)}} \\
 &= \frac{2 \text{ त्रा. ज्या क. ज्या ख. ज्या ग}}{(ज्या ख + ज्या ग - ज्या क)}
 \end{aligned}$$

अथ, ज्या ख + ज्या ग - ज्या क

$$= \frac{2\Delta}{\text{गा.का}} + \frac{2\Delta}{\text{का.खा}} - \frac{2\Delta}{\text{खा.गा}}$$

(अनुच्छेद ११.१ से)

$$= \frac{2\Delta}{\text{का.खा.गा}} (\text{खा} + \text{गा} - \text{का})$$

$$= \frac{2}{\text{का.खा.गा}} \sqrt{\text{सा (सा - का)(सा - खा)(सा - गा)} \times$$

(२ सा - २ का

$$= 8 \sqrt{\frac{(\text{सा} - \text{गा})(\text{सा} - \text{का})}{\text{गा का}}} \cdot \sqrt{\frac{(\text{सा} - \text{का})(\text{सा} - \text{खा})}{\text{का खा}}} \times$$

$$\sqrt{\frac{\text{सा (सा - का)}}{\text{खा गा}}}$$

$$= 8 \text{ ज्या } \frac{\text{ख}}{2} \text{ ज्या } \frac{\text{ग}}{2} \text{ कोज्या } \frac{\text{क}}{2}$$

∴ त्र. =

$$\frac{8 \text{ त्रा ज्या } \frac{\text{क}}{2} \text{ कोज्या } \frac{\text{क}}{2} \text{ ज्या } \frac{\text{ख}}{2} \text{ कोज्या } \frac{\text{ख}}{2} \text{ ज्या } \frac{\text{ग}}{2} \text{ कोज्या } \frac{\text{ग}}{2}}{8 \text{ ज्या } \frac{\text{ख}}{2} \text{ ज्या } \frac{\text{ग}}{2} \text{ कोज्या } \frac{\text{क}}{2}}$$

$$= \frac{8 \text{ ज्या } \frac{\text{ख}}{2} \text{ ज्या } \frac{\text{ग}}{2} \text{ कोज्या } \frac{\text{क}}{2}}{8 \text{ ज्या } \frac{\text{ख}}{2} \text{ ज्या } \frac{\text{ग}}{2} \text{ कोज्या } \frac{\text{क}}{2}}$$

$$= \text{धवा ज्या } \frac{\text{क}}{2} \text{ कोज्या } \frac{\text{ख}}{2} \text{ कोज्या } \frac{\text{ग}}{2}$$

इसी प्रकार

$$\text{प्र}_1 = \text{ध वा कोज्या } \frac{\text{क}}{2} \text{ ज्या } \frac{\text{ख}}{2} \text{ कोज्या } \frac{\text{ग}}{2}$$

और $\text{प्र}_2 = \text{ध वा कोज्या } \frac{\text{क}}{2} \text{ कोज्या } \frac{\text{ख}}{2} \text{ ज्या } \frac{\text{ग}}{2}$

११.४३ वहिस्त्रिज्या के अन्य व्यंजक—
अनुच्छेद ११.४१ की आकृति से,

$$\text{कछ,} + \text{कज,} = \text{कग} + \text{गछ,} + \text{कख} + \text{खज,}$$

$$= \text{कग} + \text{गच,} + \text{कख} + \text{खच,}$$

$$(\because \text{गछ,} = \text{गच,}, \text{ खज,} = \text{खच,})$$

$$= \text{कग} + \text{कख} + \text{खग} = 2 \text{ सा}$$

और $\text{कछ,} = \text{कज,}$

$$\therefore \text{कछ,} = \text{कज,} = \text{सा}$$

Δ अ, कज, से,

$$\text{अ, ज,} = \text{कज, स्प } \frac{\text{क}}{2}$$

$$\text{अथवा प्र}_1 = \text{सा स्प } \frac{\text{क}}{2}$$

इसी प्रकार $\text{प्र}_2 = \text{सा स्प } \frac{\text{ख}}{2}$

और $\text{प्र}_3 = \text{सा स्प } \frac{\text{ग}}{2}$

वैकल्पिक रीति—

$$\begin{aligned}
 \text{प्र. १} &= \frac{\Delta}{\text{सा - का}} \\
 &= \frac{\sqrt{\text{मा (सा - का) (सा - रा) (सा - गा)}}}{(\text{सा - का})} \\
 &= \sqrt{\frac{\text{मा (सा - रा) (सा - गा)}}{(\text{सा - का})}} \\
 &= \text{सा} \sqrt{\frac{(\text{सा - रा) (सा - गा)}}{\text{सा (मा - का)}}} \\
 &= \text{सा स्प} \frac{\text{क}}{२}
 \end{aligned}$$

इसी प्रकार प्र. २ = सा स्प $\frac{\text{ख}}{२}$

और प्र. ३ = सा स्प $\frac{\text{ग}}{२}$

११.५ उदाहरण १— सिद्ध करो कि

$$\Delta = २ \text{ प्रा}^१ \text{ ज्या क ज्या ख ज्या ग}$$

अनुच्छेद ११.२ से,

$$\begin{aligned}
 २ \text{ प्रा}^१ \text{ ज्या क ज्या ख ज्या ग} &= २ \text{ प्रा}^१ \cdot \frac{\text{का}}{२\text{प्रा}} \cdot \frac{\text{खा}}{२\text{प्रा}} \cdot \frac{\text{गा}}{२\text{प्रा}} \\
 &= \frac{\text{का खा गा}}{४ \text{प्रा}} \\
 &= \Delta
 \end{aligned}$$

$\therefore \Delta = 2$ चा ज्या क ज्या ख तथा ग

उदाहरण २— सिद्ध करो कि

$$(\sin_1 + \sin_2) \operatorname{cosec} \frac{A}{2} = (\sin_3 - \sin_1) \operatorname{cosec} \frac{A}{2} = \text{गा}$$

अनुच्छेद ११.४३ से

$$(\sin_1 + \sin_2) \operatorname{cosec} \frac{A}{2}$$

$$= \left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{A}{2} \right) \operatorname{cosec} \frac{A}{2}$$

$$= \sin \frac{A}{2} \left(\operatorname{cosec} \frac{A}{2} + \operatorname{cosec} \frac{A}{2} \right)$$

$$= \sin_3 \left(\frac{\operatorname{cosec} \frac{A}{2}}{\operatorname{cosec} \frac{A}{2}} + \frac{\operatorname{cosec} \frac{A}{2}}{\operatorname{cosec} \frac{A}{2}} \right)$$

$$= \sin_3 \frac{\operatorname{cosec} \left(\frac{A}{2} \right)}{\operatorname{cosec} \frac{A}{2} \operatorname{cosec} \frac{A}{2}}$$

$$= \sin_3 \frac{\operatorname{cosec} \frac{A}{2}}{\operatorname{cosec} \frac{A}{2} \operatorname{cosec} \frac{A}{2}}$$

$$\left(\because \frac{\operatorname{cosec} \frac{A}{2}}{\operatorname{cosec} \frac{A}{2}} = 1 = \frac{A}{2} \right)$$

$$= ४ त्रा कोज्या \frac{क}{२} कोज्या \frac{ख}{२} ज्या \frac{ग}{२} \times$$

$$\frac{\text{कोज्या } \frac{ग}{२}}{\text{कोज्या } \frac{क}{२} \text{ कोज्या } \frac{ख}{२}} \quad (\text{अनुच्छेद ११.४२ से})$$

$$= ४ त्रा ज्या \frac{ग}{२} कोज्या \frac{ग}{२} = २ त्रा ज्या ग = गा$$

$$\text{और } (त्र_१ - त्र) \text{ कोस्प } \frac{ग}{२}$$

$$= \left\{ \text{सा स्प } \frac{ग}{२} - (\text{सा} - गा) \times \text{सा } \frac{ग}{२} \right\} \text{ कोस्प } \frac{ग}{२}$$

$$= \left\{ \text{सा} - (\text{सा} - गा) \right\} = गा$$

$$\therefore (त्र_१ + त्र_२) \text{ स्प } \frac{ग}{२} = (त्र_१ - त्र) \text{ कोस्प } \frac{ग}{२} = गा$$

उदाहरण ३— सिद्ध करो कि

$$(त्र_१ - त्र) (त्र_२ - त्र) (त्र_३ - त्र) = ४ त्रा त्र^३$$

अनुच्छेद ११.२ और ११.४१ से

$$(त्र_१ - त्र) (त्र_२ - त्र) (त्र_३ - त्र)$$

$$= \left(\frac{\Delta}{\text{सा} - का} - \frac{\Delta}{\text{सा}} \right) \left(\frac{\Delta}{\text{सा} - खा} - \frac{\Delta}{\text{सा}} \right) \left(\frac{\Delta}{\text{सा} - गा} - \frac{\Delta}{\text{सा}} \right)$$

दक्षिण पक्ष

$$= \frac{\Delta^3 (\text{सा} - \text{सा} - का) (\text{सा} - \text{सा} - खा) (\text{सा} - \text{सा} - गा)}{\text{सा}^3 (\text{सा} - का) (\text{सा} - खा) (\text{सा} - गा)}$$

$$= \frac{\Delta^3 \text{ का खा गा}}{\text{सा}^2 \Delta^2}$$

$$= \frac{\Delta \cdot \text{का.खा.गा}}{\text{सा}^2}$$

$$= \frac{\Delta^3}{\text{सा}^2} \left(\frac{\text{का.खा.गा}}{\Delta} \right)$$

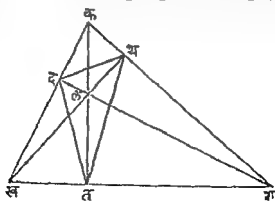
$$= \text{प्र}^4 \cdot \text{उत्रा} \quad (\text{अनुच्छेद ११.२१ से})$$

$$\therefore (\text{प्र}_1 - \text{प्र}) (\text{प्र}_2 - \text{प्र}) (\text{प्र}_3 - \text{प्र}) = \text{उत्रा प्र}^2$$

११.६ त्रिभुज की भुजाओं और कोणविंदुओं (angular points) से लंबकेन्द्र (orthocentre) की दूरियां ।

त्रिभुज कखग के शीर्षों से सम्मुख की भुजाओं पर कत, खथ, गद लंब खींचो ।

इन तीन रेखाओं का मिथश्छेदन बिंदु ल त्रिभुज का लंब केन्द्र है । तथ, यद और दत को मिलाओ । तो त्रिभुज तथद, त्रिभुज कखग का पदिक त्रिभुज (pedal triangle) होगा ।



आ. ११.५

Δ कखत में,

$$\text{खत} = \text{कख कोज्या ख}$$

$$= \text{गा कोज्या ख}$$

Δ गखथ में, \angle गखथ $= 90^\circ - \text{ग}$

Δ लखत में,

$$\frac{\text{लत}}{\text{खत}} = \text{स्प तखल}$$

$$= \text{स्प गखथ}$$

$$\therefore \text{लत} = \text{खत स्प गखथ}$$

$$= \text{गा कोज्या ख स्प } (90^\circ - \text{ग})$$

$$= \text{गा कोज्या ख कोस्प ग}$$

$$\text{परंतु गा} = २ \text{ वा ज्या ग}$$

$$\therefore \text{लत} = २ \text{ वा कोज्या ग कोज्या ग}$$

$$\text{इसी प्रकार लथ} = २ \text{ वा कोज्या ग कोज्या क}$$

$$\text{और लद} = २ \text{ वा कोज्या क कोज्या ख}$$

पुनः Δ कखथ में,

$$\text{कथ} = \text{कख कोज्या क} = \text{गा कोज्या क}$$

और Δ कतग में, \angle कतग $= 90^\circ - \text{ग}$

$$\Delta$$
 कलथ में, $\frac{\text{कल}}{\text{कथ}} = \text{व्युत्कोज्या थकल}$

$$= \text{व्युत्कोज्या गकत}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{कल} &= \text{कथ व्युत्क्रोज्या गकत} \\
 &= \text{गा कोज्या क व्युत्क्रोज्या } (९०^\circ - \text{ग}) \\
 &= \text{गा कोज्या क व्युज्या ग} \\
 &= २ \text{ प्रा ज्या ग कोज्या क व्युज्या ग} \\
 &= २ \text{ प्रा कोज्या क}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{इसी प्रकार, खल} &= २ \text{ प्रा कोज्या ख} \\
 \text{गल} &= २ \text{ प्रा कोज्या ग}
 \end{aligned}$$

११.६१ पदिक त्रिभुज की मुजाएँ और उसके कोण—
 क्योंकि $\angle \text{लदख} = ९०^\circ$, और $\angle \text{लतख} = ९०^\circ$
 \therefore दलतख एक घृतीय चतुर्भुज है।

$\therefore \angle \text{दतल} = \angle \text{दखल} = ९०^\circ - \text{क}$
 इसी प्रकार लतगथ एक घृतीय चतुर्भुज है।

$$\begin{aligned}
 \therefore \angle \text{लतथ} &= \angle \text{लगथ} = ९०^\circ - \text{क} \\
 \therefore \angle \text{दतथ} &= \angle \text{दतल} + \angle \text{लतथ} \\
 &= १८०^\circ - २ \text{ क}
 \end{aligned}$$

इसी प्रकार $\angle \text{तथद} = १८०^\circ - २ \text{ ल}$
 और $\angle \text{थदत} = १८०^\circ - २ \text{ ग}$
 $\triangle \text{कखथ}$ में, कथ = गा कोज्या क
 $\triangle \text{कगद}$ में,

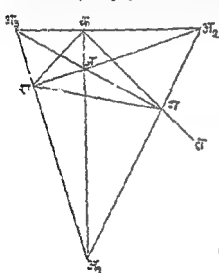
$$\begin{aligned}
 \text{कद} &= \text{खा कोज्या क} \\
 \triangle \text{कदथ} \text{ में,}
 \end{aligned}$$

$$\text{थद}^2 = \text{कद}^2 + \text{कथ}^2 - २ \text{ कद. कथ कोज्या क}$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{खा}^2 \text{कोज्या}^2 \text{क} + \text{गा}^2 \text{कोज्या}^2 \text{क} \\
 &\quad - 2 \text{खा कोज्या क. गा कोज्या क. कोज्या क} \\
 &= \text{कोज्या}^2 \text{क} (\text{खा}^2 + \text{गा}^2 - 2 \text{खा गा कोज्या क}) \\
 &= \text{कोज्या}^2 \text{क. का}^2
 \end{aligned}$$

\therefore यदि = का कोज्या क
 इसीप्रकार दत = खा कोज्या ख
 और तथ = गा कोज्या ग

११.६२ मान लो बिंदु अ, त्रिभुज कखग का अंतःकेंद्र
 और बिंदु अ_१, अ_२ और अ_३ क्रमशः कोण क, ख और ग के
 सामने के यहिफेन्द्र हैं। क्योंकि रेखाएँ अग और अ_१ ग कोण



कागख का क्रमशः
 अन्तरतः (internally)
 और बाह्यतः (exter-
 nally) अर्धन करती
 है,
 अतः, रेखिनी से,
 $\angle \text{अगम}_1 = 90^\circ$

इसी प्रकार
 $\angle \text{अगम}_2 = 90^\circ$

इसलिए अ, गम_१
 एक सरल रेखा है
 और अग उल पर
 लंब है।

आ. ११.६

और रेखाएं अक और अ₁क दोनों कोण खकग का अन्तरतः अर्धन करती हैं। अतः बिंदु क, अ और अ₁, एक सरलरेखा में हैं। इसी प्रकार खअअ₁ और गअअ₁ भी सरलरेखाएं हैं।

इसलिए बिंदु क, ख, ग त्रिभुज अ₁अ₂अ₃ के शीर्षों से सम्मुख की भुजाओं पर खींचे गए लंबों के पाद (feet of perpendiculars) हैं और अ इन लंबों का मिथश्छेदन बिंदु है।

अतः कखग त्रिभुज अ₁अ₂अ₃ का पदिक त्रिभुज है और बिंदु अ उसका लंबकेन्द्र है।

उदाहरण— त्रिभुज अ₁अ₂अ₃ की भुजाएं और उसके कोणों का निश्चय करो।

Δ कखग, Δ अ₁अ₂अ₃ का पदिक त्रिभुज है,

अतः अनुच्छेद ११-६१ से,

$$\angle \text{खकग} = 180^\circ - 2 \angle \text{अ}_2 \text{अ}_1 \text{अ}_3,$$

$$\text{अथवा } \angle \text{क} = 180^\circ - 2 \angle \text{अ}_1,$$

$$\therefore \angle \text{अ}_1 = \frac{180^\circ - \text{क}}{2} = 90^\circ - \frac{\text{क}}{2}$$

$$\text{इसी प्रकार } \angle \text{अ}_2 = 90^\circ - \frac{\text{ख}}{2}$$

$$\text{और } \angle \text{अ}_3 = 90^\circ - \frac{\text{ग}}{2}$$

पुनः अनुच्छेद ११-६१ से

लगा = म, म, कोज्या म, म, म,

अथवा का = म, म, कोज्या म,

∴ म, म, = का स्युत्कोज्या म,

$$= का स्युत्कोज्या \left(90^\circ - \frac{क}{२} \right) = का स्युत्कोज्या \frac{क}{२}$$

इसी प्रकार म, म, = गा स्युत्कोज्या $\frac{ग}{२}$

और म, म, = रा स्युत्कोज्या $\frac{रा}{२}$

धैरविक्र रीति—

अनुच्छेद ११-४१ की टिप्पणी के अनुसार

$$\angle म, ग = 90^\circ - \frac{क}{२}$$

परन्तु $\angle म, ग = \angle म,$

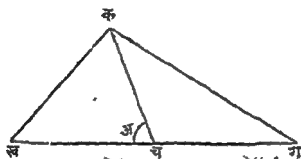
$$\therefore \angle म, = 90^\circ - \frac{क}{२}$$

इसी प्रकार $\angle म, = 90^\circ - \frac{रा}{२}$ और $\angle म, = 90^\circ - \frac{ग}{२}$

ऊपर की आकृति से $\triangle क, म, म,$ में,

म, म, = म, का स्युत्कोज्या म,

११७ मध्यगाओं (medians) की लंबाई—



का. ११.७

मान लो कि त्रिभुज कखग में मध्यगा कच, रेखा खग का अर्धन करती है।

$$\text{तो } खच = गच = \frac{का}{२}$$

△ कखच में,

$$कच^२ = कख^२ + खच^२ - २कख.खच \cos \angle ख$$

$$= गा^२ + \frac{का^२}{४} - २गा \cdot \frac{का}{२} \cos \angle ख$$

$$= गा^२ + \frac{का^२}{४} - गाका \cos \angle ख$$

$$\therefore ४कच^२ = ४गा^२ + का^२ - ४गाका \cos \angle ख$$

$$= \text{अ, क व्युज्ज्या } \left(90^\circ - \frac{\text{ख}}{2} \right)$$

$$= \text{अ, क व्युत्कोज्या } \frac{\text{ख}}{2}$$

$$\text{परन्तु अ, क} = \text{अ, व्युज्ज्या } \frac{\text{क}}{2}$$

(मनुच्छेद ११.३१ की टिप्पणी से)

$$\therefore \text{अ, अ}_1 = \text{अ, व्युज्ज्या } \frac{\text{क}}{2} \text{ व्युत्कोज्या } \frac{\text{ख}}{2}$$

$$= \text{सा स्प } \frac{\text{क}}{2} \text{ व्युज्ज्या } \frac{\text{क}}{2} \text{ व्युत्कोज्या } \frac{\text{ख}}{2}$$

$$= \frac{\text{सा}}{\text{कोज्या } \frac{\text{क}}{2} \text{ कोज्या } \frac{\text{ख}}{2}}$$

$$= \text{सा} \sqrt{\frac{\text{खा गा. गा का}}{\text{सा (सा - का). सा (सा - खा)}}$$

$$= \text{गा} \sqrt{\frac{\text{का खा}}{(\text{सा - का}) (\text{सा - खा})}}$$

$$= \text{गा व्युज्ज्या } \frac{\text{ग}}{2}$$

इसी प्रकार अ_२ अ_०, अ_३ अ_१, भी निश्चित किए जा सकते हैं ।

११.७ मध्यगाओं (medians) की लंबाई—



मान लो कि त्रिभुज कखग में मध्यगा कघ, रेखा खग का अर्धन करती है।

$$\therefore \text{तो } खघ = गघ = \frac{का}{2}$$

Δ कखघ में,

$$कघ^2 = कख^2 + खघ^2 - 2कख \cdot खघ \cos \angle ख$$

$$= का^2 + \frac{का^2}{4} - 2का \cdot \frac{का}{2} \cos \angle ख$$

$$= का^2 + \frac{का^2}{4} - का^2 \cos \angle ख$$

$$\therefore 2कघ^2 = 2का^2 + \frac{का^2}{2} - 2का^2 \cos \angle ख$$

$$= 2\text{गा}^2 + \frac{\text{का}^2}{2} - (\text{का}^2 + \text{गा}^2 - \text{खा}^2)$$

$$= \text{गा}^2 + \text{खा}^2 - \frac{\text{का}^2}{2}$$

$$\therefore \text{कच} = \frac{1}{2} \sqrt{2\text{गा}^2 + 2\text{खा}^2 - \text{का}^2}$$

इसी प्रकार, यदि गक और कख भुजाओं के मध्यबिंदु क्रमशः छ और ज हों तो,

$$\text{खंछ} = \frac{1}{2} \sqrt{2\text{का}^2 + 2\text{गा}^2 - \text{खा}^2}$$

$$\text{और गज} = \frac{1}{2} \sqrt{2\text{खा}^2 + 2\text{का}^2 - \text{गा}^2}$$

११७१ भुजाओं के साथ मध्यगाओं की नति (inclinations) —

मान लो \angle कचख = अ

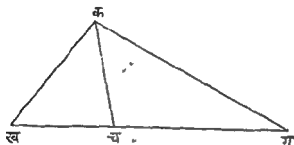
$$\triangle \text{ कचख में, } \frac{\text{कच}}{\text{ज्या ख}} = \frac{\text{गा}}{\text{ज्या अ}}$$

$$\therefore \text{ज्या अ} = \frac{\text{गा ज्या ख}}{\text{कच}}$$

$$= \frac{2\text{गा ज्या ख}}{\sqrt{2\text{गा}^2 + 2\text{खा}^2 - \text{का}^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \Delta}{\frac{1}{2} \sqrt{2ga^2 + 2xa^2 - ca^2}}$$

११८ त्रिभुज के कोणों के अर्धरू—



आ ११८

मान लो त्रिभुज कखग के कोण क का अर्धरू कच, खग रेखा का च बिंदु में छेदन करता है।

अथ, Δ कखच + Δ कचग = Δ कखग

$$\therefore \frac{1}{2} \text{कख. कच ज्या } \frac{क}{2} + \frac{1}{2} \text{कग. कच ज्या } \frac{क}{2} = \frac{1}{2} \text{कख. कग ज्या क}$$

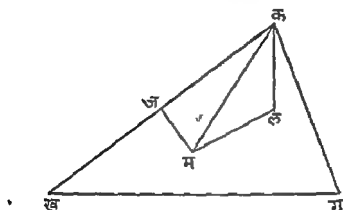
$$\text{अथवा } \frac{1}{2} \text{कच ज्या } \frac{क}{2} (ग + ख) = \frac{1}{2} \text{ग ख ज्या क}$$

$$\text{अथवा कच (ग + ख) = ग ख कोज्या } \frac{क}{2}$$

$$\therefore \text{कच} = \frac{\text{खग} + \text{का} \cos \frac{\text{क}}{2}}{\text{ग} + \text{ख}}$$

$$\text{और } \angle \text{कचग} = \angle \text{चखक} + \angle \text{खकच} = \text{ख} + \frac{\text{क}}{2}$$

११.९ लंबकेन्द्र और परिकेन्द्र के बीच की दूरी—



आ. ११.९

मान लो कि बिंदु म और ल क्रमशः त्रिभुज कखग के परिकेन्द्र और लंबकेन्द्र हों। बिंदु म से कख रेखा पर मज लंब खींचो।

$$\text{अब, } \angle \text{जमक} = \text{ग}$$

$$\therefore \angle \text{मकख} = 90^\circ - \text{ग}$$

$$\text{और } \angle \text{लफख} = 90^\circ - \text{ख}$$

$$\therefore \angle मकल = \angle लकख - \angle मकख$$

$$= (९०^\circ - ख) - (९०^\circ - ग) = ग - ख$$

$$\text{और कल} = २त्रा \text{ कोज्या क} \quad (\text{अनुच्छेद ११.६ से})$$

$$\text{और कम} = त्रा$$

△ कमल से,

$$मल^2 = कम^2 + कल^2 - २कम. कल \text{ कोज्या मकल}$$

$$= त्रा^2 + ४त्रा^2 \text{ कोज्या}^2 क$$

$$- ४त्रा^2 \text{ कोज्या क कोज्या (ग - ख)}$$

$$= त्रा^2 \left[१ + ४ \text{ कोज्या क} \left\{ \text{कोज्या क} \right. \right. \\ \left. \left. - \text{कोज्या (ग - ख)} \right\} \right]$$

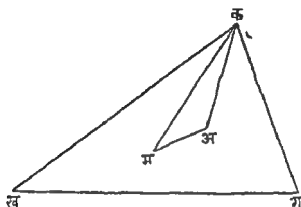
$$= त्रा^2 \left[१ - ४ \text{ कोज्या क} \left\{ \text{कोज्या (ख + ग)} \right. \right. \\ \left. \left. + \text{कोज्या (ग - ख)} \right\} \right]$$

$$= त्रा^2 [१ - ८ \text{ कोज्या क कोज्या ख कोज्या ग}]$$

$$\therefore मल = त्रा \sqrt{१ - ८ \text{ कोज्या क कोज्या ख कोज्या ग}}$$

उपप्रेष— यदि त्रिभुज कखग लंबकोण त्रिभुज हो तो
मल = त्रा

११.९१ परिकेंद्र और अंतःकेंद्र के बीच की दूरी—



आ ११.१०

मान लो त्रिभुज $\triangle खग$ में बिंदु $म$ और $अ$ क्रमशः परि-
केंद्र और अंतःकेंद्र हैं।

$$\angle गकअ = \frac{क}{२}, \quad \angle गकम = ९०^\circ - ख$$

$$\therefore \angle अकम = \angle गकम - \angle गकअ$$

$$= ९०^\circ - ख - \frac{क}{२}$$

$$= \frac{क + ख + ग}{२} - ख - \frac{क}{२}$$

$$= \frac{ग - ख}{२}$$

$$कम = \frac{ग - ख}{२}$$

$$\text{और कंम} = \text{प्र व्युज्या} \frac{\text{क}}{2}$$

(अनुच्छेद ११-३)

$$= \left(\text{धत्रा ज्या} \frac{\text{क}}{2} \text{ ज्या} \frac{\text{ख}}{2} \text{ ज्या} \frac{\text{ग}}{2} \right) \text{व्युज्या} \frac{\text{क}}{2}$$

$$= \text{धत्रा ज्या} \frac{\text{ख}}{2} \text{ ज्या} \frac{\text{ग}}{2}$$

△ अकम में,

$$\text{मम}^2 = \text{कम}^2 + \text{कम}^2 - २\text{कम. कम कोज्या अकम}$$

$$= \text{त्रा}^2 + १६\text{त्रा}^2 \text{ ज्या}^2 \frac{\text{ख}}{2} \text{ ज्या}^2 \frac{\text{ग}}{2}$$

$$- ८\text{त्रा}^2 \text{ ज्या} \frac{\text{ख}}{2} \text{ ज्या} \frac{\text{ग}}{2} \text{ कोज्या} \left(\frac{\text{ग} - \text{ख}}{2} \right)$$

$$= \text{त्रा}^2 \left[१ + ८ \text{ ज्या} \frac{\text{ख}}{2} \text{ ज्या} \frac{\text{ग}}{2} \left\{ २ \text{ ज्या} \frac{\text{ख}}{2} \text{ ज्या} \frac{\text{ग}}{2} - \text{कोज्या} \left(\frac{\text{ग} - \text{ख}}{2} \right) \right\} \right]$$

$$= \text{त्रा}^2 \left[१ + ८ \text{ ज्या} \frac{\text{ख}}{2} \text{ ज्या} \frac{\text{ग}}{2} \left(\text{ज्या} \frac{\text{ख}}{2} \text{ ज्या} \frac{\text{ग}}{2} - \text{कोज्या} \frac{\text{ख}}{2} \text{ कोज्या} \frac{\text{ग}}{2} \right) \right]$$

$$= \text{त्रा}^2 \left[१ - ८ \text{ ज्या} \frac{\text{ख}}{2} \text{ ज्या} \frac{\text{ग}}{2} \text{ कोज्या} \left(\frac{\text{ख} + \text{ग}}{2} \right) \right]$$

$$= \text{त्रा}^2 \left[१ - ८ \text{ ज्या} \frac{\text{ख}}{2} \text{ ज्या} \frac{\text{ग}}{2} \text{ ज्या} \frac{\text{क}}{2} \right]$$

$$\therefore \text{मअ} = \text{त्रा} \sqrt{1 - \frac{4}{2} \frac{\text{ज्या क}}{2} \frac{\text{ख}}{2} \frac{\text{ग}}{2}}$$

यह फल इस रूप में भी लिखा जा सकता है—

$$\begin{aligned} \text{मअ}^2 &= \text{त्रा}^2 - 2\text{त्रा.४त्रा} \frac{\text{ज्या क}}{2} \frac{\text{ख}}{2} \frac{\text{ग}}{2} \\ &= \text{त्रा}^2 - 2\text{त्रा प्र} \end{aligned}$$

इसी प्रकार यह भी दिखाया जा सकता है कि,

$$\begin{aligned} \text{मअ}_1 &= \text{त्रा} \sqrt{1 + \frac{4}{2} \frac{\text{ज्या क}}{2} \frac{\text{ख}}{2} \frac{\text{ग}}{2}} \\ &= \sqrt{\text{त्रा}^2 + 2\text{त्रा प्र}_1} \end{aligned}$$

प्रभावलि १६

- (१) एक त्रिभुज की भुजाएं क्रमशः ३, ४ और ५ पाद लंबी हैं। त्रा, प्र, प्र_१, प्र_२ और प्र_३ निर्दिष्ट करो।
- (२) सिद्ध करो कि किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \text{त्रा}_1 \frac{\text{ज्या क. ज्या ख}}{\text{ज्या ग}}$
सिद्ध करो कि किसी त्रिभुज कर्णों में,
- (३) का कोण क + खा कोण ख + गा कोण ग $= 2(\text{त्रा} + \text{प्र})$
- (४) प्र_१ + प्र_२ + प्र_३ - प्र = ४ त्रा [आंध्र १९४२]

$$(५) \left(\frac{१}{त्र_१} + \frac{१}{त्र_२}\right) \left(\frac{१}{त्र_२} + \frac{१}{त्र_३}\right) \left(\frac{१}{त्र_३} + \frac{१}{त्र_१}\right)$$

$$= \frac{६४ त्रा^३}{का^२ खा^२ गा^२}$$

[नागपुर १९२५]

$$(६) \frac{१}{त्र} = \frac{१}{त्र_१} + \frac{१}{त्र_२} + \frac{१}{त्र_३}$$

[फलकत्ता १९३१]

$$(७) त्र_१ त्र_२ + त्र_२ त्र_३ + त्र_३ त्र_१ = ता^२$$

[ध्वई १९३७]

$$(८) (त्र_२ - त्र_३) कोज्या क + (त्र_३ - त्र_१) कोज्या ख$$

$$+ (त्र_१ - त्र_२) कोज्या ग = ०$$

[सांध १९३५]

$$(९) त्र त्र_१ त्र_२ त्र_३ = \Delta^२$$

[ध्वई १९४३]

$$(१०) \Delta = ४ त्रा त्र कोज्या \frac{क}{२} कोज्या \frac{ख}{२} कोज्या \frac{ग}{२}$$

$$(११) (त्र_२ + त्र_३) \sqrt{\frac{त्र त्र_१}{त्र_२ त्र_३}} = का$$

[ध्वई १९४२]

$$(१२) \frac{१}{२ त्रा त्र} = \frac{१}{खा गा} + \frac{१}{गा का} + \frac{१}{का खा}$$

[इलाहाबाद १९४२]

(१३) यदि कलम एक लंबकोण त्रिभुज हो, तो सिद्ध करो कि

$$\left(१ - \frac{त्र_१}{त्र_२}\right) \left(१ - \frac{त्र_१}{त्र_३}\right) = २$$

- (१४) यदि कखग एक लंबकोण त्रिभुज हो, तो सिद्ध करो कि

$$घ_1 = घ_2 + घ_3 + घ \quad [\text{नागपुर १९४३}]$$

- (१५) यदि Δ कखग में, शीर्ष क, ख, ग से सामने की भुजाओं पर खींचे गए लंबों की लंबाइयां क्रमशः ल_१, ल_२, ल_३ हों तो सिद्ध करो कि

$$(१) \frac{१}{ल_१} + \frac{१}{ल_२} + \frac{१}{ल_३} = \frac{१}{घ} \quad [\text{नागपुर १९४६}]$$

- (२) घ_२ और घ_३ का हरात्मक मध्यक (harmonic mean) ल_१ है।

[नागपुर १९४६]

$$(३) ८ आ^३ = \frac{का^२ खा^२ गा^२}{ल_१ ल_२ ल_३} \quad [\text{इलाहाबाद १९३९}]$$

- (१६) त्रिभुज कखग में शीर्ष-बिन्दुओं से सामने की भुजाओं पर खींचे गए लम्ब बिन्दु म पर मिलते हैं; और मक = य, मख = र, मग = ल, तो दिखाओ कि

$$\frac{का}{य} + \frac{खा}{र} + \frac{गा}{ल} = \frac{का खा गा}{य र ल}$$

[बनारस १९४४]

- (१७) सिद्ध करो कि यदि त्रिभुज कखग में शीर्ष क, ख, ग से सामने की भुजाओं पर खींचे गए लम्बों के पाद क्रमशः च, छ, ज हों तो त्रिभुज कछज, खचज

और गच्छ के परिलेखी वृत्तों के व्यास क्रमशः का.कोस्प.क, खा.कोस्प.ख और गा.कोस्प.ग हैं।

- (१८) दिखाओ कि त्रिभुज कखग के पक्षिक त्रिभुज का परिमाण ४ त्रा. ज्या क, ज्या ख, ज्या ग है।

[नागपुर १९४१]

- (१९) यदि त्रिभुज कखग के परिकेन्द्र से तीनों भुजाओं पर खींचे गए लम्बों की लम्बाइयाँ ल, ल', ल" हों तो सिद्ध करो कि

$$\frac{\text{का}}{\text{ल}} + \frac{\text{खा}}{\text{ल}'} + \frac{\text{गा}}{\text{ल}''} = \frac{१}{४} \cdot \frac{\text{का खा गा}}{\text{ल ल' ल''}}$$

[वनारस १९३५]

- (२०) सिद्ध करो कि त्रिभुज कखग में,

$$\frac{\text{अंतर्वृत्त का क्षेत्रफल}}{\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल}} = \frac{\text{व्या}}{\text{कोस्प } \frac{\text{क}}{२} \text{ कोस्प } \frac{\text{ख}}{२} \text{ कोस्प } \frac{\text{ग}}{२}}$$

[कलकत्ता बी. एस्सी १९३१]

- (२१) यदि त्रिभुज कखग के बहिष्केन्द्र अ_१, अ_२ और अ_३ हों तो सिद्ध करो कि

$$(१) \text{अ}_१ \text{अ}_२ = \text{का.व्युज्या } \frac{\text{क}}{२} = ४ \text{ त्रा. कोज्या } \frac{\text{क}}{२}$$

$$(२) \triangle \text{अ}_१ \text{अ}_२ \text{अ}_३ \text{ का क्षेत्रफल}$$

$$= ८ \text{ त्रा. कोज्या } \frac{\text{क}}{२} \text{ कोज्या } \frac{\text{ख}}{२} \text{ कोज्या } \frac{\text{ग}}{२}$$

$$= \frac{\text{का.खा.गा}}{२ \text{ त्रा}}$$

[नागपुर १९४०, १९४४]

$$(३) \quad \alpha_1 \alpha_2 \cdot \alpha_3 \alpha_4 \cdot \alpha_5 \alpha_6 = \frac{16 \text{ चा}^2 \Delta}{\text{घ}}$$

(२२) यदि त्रिभुज कक्षग का अंतःकेन्द्र अ और बहिष्केन्द्र $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ हों, तो सिद्ध करो कि

$$(१) \quad \alpha \alpha_1 = \text{का.व्युत्कोज्या} \frac{\text{क}}{२} = ४ \text{ चा.ज्या} \frac{\text{क}}{२}$$

$$(२) \quad \alpha \alpha_1 \cdot \alpha \alpha_2 \cdot \alpha \alpha_3 = 16 \text{ चा}^2 \text{घ}$$

[नागपुर १९३१]

$$(३) \quad \alpha, \text{क.} \alpha_1 \text{रा.} \alpha_2 \text{ग}$$

$$= ६४ \text{चा}^2 \cdot \text{कोज्या}^2 \frac{\text{क}}{२} \cdot \text{कोज्या}^2 \frac{\text{रा}}{२} \cdot \text{कोज्या}^2 \frac{\text{ग}}{२}$$

$$(४) \quad \alpha \text{क.} \alpha \text{रा} \alpha \text{ग} = ४ \text{ चा.घ}^2$$

$$(५) \quad \frac{\alpha \text{क}}{\alpha_1 \text{क}} + \frac{\alpha \text{रा}}{\alpha_2 \text{रा}} + \frac{\alpha \text{ग}}{\alpha_3 \text{ग}} = १$$

(२३) यदि त्रिभुज कक्षग की रसग भुजा पर बिंदु च और छ इस प्रकार लिए जाएं कि खच = चउ = छग और यदि $\angle \text{खकच} = \text{य}$, $\angle \text{चकछ} = \text{र}$, $\angle \text{छरग} = \text{ल}$ तो सिद्ध करो कि

$$\frac{\text{ज्या}(\text{य} + \text{र}) \text{ज्या}(\text{र} + \text{ल})}{\text{ज्या य ज्या ल}} = ४$$

[नागपुर १९४५]

- (२४) यदि त्रिभुज कखग के कोण ग का अर्धरू, कख भुजा का च बिंदु पर और परिवृत्त का छ बिंदु पर छेदन करता है तो दिखाओ कि

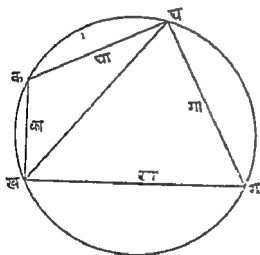
$$\frac{\text{गछ}}{\text{चछ}} = \frac{(\text{का} + \text{खा})^2}{\text{गा}^2}$$

[नागपुर १९४४]

चारहवां अध्याय

वृत्तीय चतुर्भुज; नियमित बहुभुज

१२.१ वृत्तीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल—



मान लो कि कख-
गघ एक वृत्तीय
चतुर्भुज है जिसमें
कख = कघ, खग
= खघ, गघ = गा,
घक = घा और
जिसका क्षेत्रफल
क्ष है।

शा. १२.१

$$\text{चतुर्भुज कखगघ} = \Delta \text{कखघ} + \Delta \text{खगघ}$$

$$\therefore \text{क्ष} = \frac{1}{2} \text{का.घा.कोज्या क} + \frac{1}{2} \text{खा.गा.कोज्या ग}$$

$$= \frac{1}{2} (\text{का.घा} + \text{खा.गा}) \text{कोज्या क}$$

$$(\therefore \text{ग} = \text{ज्या} - \text{क})$$

$$\therefore \text{कोज्या क} = \frac{2 \text{क्ष}}{(\text{का.घा} + \text{खा.गा})} \dots\dots\dots (1)$$

△ कखघ में,

$$\text{खघ}^2 = \text{का}^2 + \text{घा}^2 - 2 \text{का.घा.कोज्या क}$$

△ खगघ में,

$$\begin{aligned} \text{खघ}^2 &= \text{खा}^2 + \text{गा}^2 - 2 \text{खा.गा.कोज्या ग} \\ &= \text{खा}^2 + \text{गा}^2 + 2 \text{खा.गा.कोज्या क} \end{aligned}$$

खघ² की दोनों अर्धियों का समीकरण करने पर
 $\text{का}^2 + \text{घा}^2 - 2 \text{का.घा.कोज्या क}$

$$= \text{खा}^2 + \text{गा}^2 + 2 \text{खा.गा.कोज्या क}$$

$$\therefore \text{कोज्या क} = \frac{\text{का}^2 + \text{घा}^2 - \text{खा}^2 - \text{गा}^2}{2 (\text{का.घा} + \text{खा.गा})} \dots (2)$$

(1) और (2) के वर्ग और योग से,

$$1 = \frac{4 \text{क्ष}^2}{(\text{का.घा} + \text{खा.गा})^2} + \frac{(\text{का}^2 + \text{घा}^2 - \text{खा}^2 - \text{गा}^2)^2}{4 (\text{का.घा} + \text{खा.गा})^2}$$

$$\text{अथवा } 4 (\text{का.घा} + \text{खा.गा})^2$$

$$= 16 \text{क्ष}^2 + (\text{का}^2 + \text{घा}^2 - \text{खा}^2 - \text{गा}^2)^2$$

अथवा १६ क्ष^२

$$\begin{aligned}
 &= 4(\text{का.घा} + \text{खा.गा})^2 - (\text{का}^2 + \text{घा}^2 - \text{खा}^2 - \text{गा}^2)^2 \\
 &= \left\{ 2(\text{का.घा} + \text{खा.गा}) + (\text{का}^2 + \text{घा}^2 - \text{खा}^2 - \text{गा}^2) \right\} \\
 &\quad \times \left\{ 2(\text{का.घा} + \text{खा.गा}) - (\text{का}^2 + \text{घा}^2 - \text{खा}^2 - \text{गा}^2) \right\} \\
 &= \left\{ (\text{का} + \text{घा})^2 - (\text{खा} - \text{गा})^2 \right\} \times \\
 &\quad \left\{ (\text{खा} + \text{गा})^2 - (\text{का} - \text{घा})^2 \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\text{का} + \text{घा} + \text{खा} - \text{गा}) (\text{का} + \text{घा} - \text{खा} + \text{गा}) \times \\
 &\quad (\text{खा} + \text{गा} + \text{का} - \text{घा}) (\text{खा} + \text{गा} - \text{का} + \text{घा})
 \end{aligned}$$

यदि का + खा + गा + घा = २ सा तो

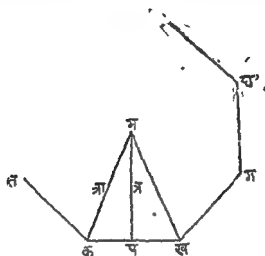
$$\begin{aligned}
 १६ \text{ क्ष}^2 &= (२सा - २गा) (२सा - २खा) \times \\
 &\quad (२सा - २घा) (२सा - २का)
 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{क्ष}^2 = (\text{सा} - \text{का}) (\text{सा} - \text{खा}) (\text{सा} - \text{गा}) (\text{सा} - \text{घा})$$

$$\therefore \text{क्ष} = \sqrt{(\text{सा} - \text{का}) (\text{सा} - \text{खा}) (\text{सा} - \text{गा}) (\text{सा} - \text{घा})}$$

१२.२ नियमित बहुभुज— यदि किसी बहुभुज की सब भुजाएं और सब कोण समान हों तो उसे नियमित बहुभुज कहते हैं।

अब नियमित बहुभुज के कोण और उसकी प्रत्येक भुजा से उसके केन्द्र पर आपातित कोण निश्चित किए जायेंगे।



आ. १२.२

स भुजाओं का एक नियमित बहुभुज कखगघ...त है। मान लो कोण क और ख के अर्धक बिंदु म पर मिथश्छेदन करते हैं। यदि म बिंदु को प्रत्येक कोण बिंदु से मिलाया जाय, तो त्रिभुज कमख के समान, स त्रिभुज प्राप्त होंगे और प्रत्येक भुजा से म बिंदु पर आपातित कोण समान होगा।

$$\therefore \angle \text{कमख} = \frac{2}{\text{स}} \text{ (चार लम्बकोण)}$$

$$= \frac{2 \text{ व्या}}{\text{स}}$$

त्रिभुज कमख में आधार कख पर के कोण समान हैं;

$$\angle \text{मकख} = \frac{\text{प्या} - \angle \text{कमख}}{2} = \frac{\text{प्या}}{2} - \frac{\text{प्या}}{\text{स}}$$

$$\therefore \text{चहुभुज का प्रत्येक कोण} = 2\angle \text{मकख} \\ = \frac{(\text{स} - 2)\text{प्या}}{\text{स}}$$

१२.३ नियमित चहुभुज में अंतर्लिखित और उसके परिलेखी वृत्तों की विन्याएँ।

आकृति १२.२ में मान लो स भुजाओं का एक नियमित चहुभुज कखगघ.....त है, जिसका केन्द्र म है और जिसकी प्रत्येक भुजा की लम्बाई य है। मक, मख को मिलाओ और म से कख पर मप लंब खींचो। मप और मक, नियमित चहुभुज की, क्रमशः अंतस्त्रिज्या और परित्रिज्या होंगी। मप को त्र और मक को त्रा से दर्शाओ।

$$\triangle \text{मकप में मप} = \text{कप. स्प मकप} \\ = \text{कप. स्प मकख}$$

परन्तु पिछले अनुच्छेद से,

$$\angle \text{मकख} = \frac{\text{प्या}}{2} - \frac{\text{प्या}}{\text{स}}$$

$$\therefore \text{त्र} = \frac{\text{य}}{2} \text{स्प} \left(\frac{\text{प्या}}{2} - \frac{\text{प्या}}{\text{स}} \right)$$

$$= \frac{\text{य}}{2} \text{कोस्प} \frac{\text{प्या}}{\text{स}} \dots\dots\dots (१)$$

$$\text{पुनः } \frac{\text{कप}}{\text{मक}} = \text{कोज्या मकप}$$

अथवा मक = कप. व्युत्कोज्या मरूप

$$= \text{कप. व्युत्कोज्या मकख}$$

$$\therefore \text{त्रा} = \frac{य}{२} \text{ व्युत्कोज्या } \left(\frac{\text{प्या}}{२} - \frac{\text{प्या}}{\text{स}} \right)$$

$$= \frac{य}{२} \text{ व्युज्या } \frac{\text{प्या}}{\text{स}} \dots\dots\dots (२)$$

१२४ नियमित बहुभुज का क्षेत्रफल—

नियमित बहुभुज कणनघ ...त का क्षेत्रफल

$$= \text{स} \times (\Delta \text{ मकप का क्षेत्रफल})$$

$$= \text{स. कप. मप}$$

$$= \text{स. कप. कप. स्प मकख}$$

$$= \text{स कप}^2 \text{. स्प मकख}$$

$$= \text{स} \left(\frac{य}{२} \right)^2 \text{ स्प } \left(\frac{\text{प्या}}{२} - \frac{\text{प्या}}{\text{स}} \right)$$

$$= \text{स } \frac{य^2}{४} \text{ कोस्प } \frac{\text{प्या}}{\text{स}} \dots\dots (४)$$

इस क्षेत्रफल को अंतस्त्रिज्या और परित्रिज्या के पदों में व्यक्त कर सकते हैं।

इस प्रकार अपेक्षित क्षेत्रफल

$$= \frac{स. य.^2}{४} कोस \frac{प्या}{स}$$

$$= \frac{स}{४} \left(\frac{४ य.^2}{कोस^2 \frac{प्या}{स}} \right) कोस \frac{प्या}{स}$$

[अनुच्छेद १२.३ सूत्र (१) से]

$$= स. य.^2. स्प \frac{प्या}{स} \dots\dots\dots (आ)$$

पुनः अपेक्षित क्षेत्रफल = $\frac{स. य.^2}{४} कोस \frac{प्या}{स}$,

$$= \frac{स}{४} \left(\frac{४ य.^2}{व्युज्या^2 \frac{प्या}{स}} \right) कोस \frac{प्या}{स}$$

[अनुच्छेद १२.३ सूत्र (२) से]

$$= स. य.^2. कोज्या \frac{प्या}{स} ज्या \frac{प्या}{स}$$

$$= \frac{स}{२} \cdot य.^2. ज्या \frac{२ प्या}{स} \dots\dots\dots (इ)$$

१२.५ वृत्त का क्षेत्रफल— यदि किसी नियमित बहुभुज की भुजाओं की संख्या अनियत रूप से (indefinitely) बढ़ाई जाये तो सीमा में बहुभुज का परिमाण, परिलेखी वृत्त की परिधि से संपन्न करता है।

इसलिए जब नियमित बहुभुज की भुजाओं की संख्या अनंत हो जानी है तो उसका क्षेत्रफल परिवृत्त के क्षेत्रफल के सम हो जाता है।

यदि नियमित बहुभुज की भुजाओं की संख्या s हो और उसकी परित्रिज्या π हो तो

$$\text{बहुभुज का क्षेत्रफल} = \frac{s}{2} \pi^2 \frac{2\pi}{s}$$

\therefore परिलेखी वृत्त (त्रिज्या π) का क्षेत्रफल

$$= \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \frac{s}{2} \pi^2 \frac{2\pi}{s} \right\}$$

$$= \pi^2 \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \frac{s}{2} \cdot \frac{2\pi}{s} \right\}$$

$$= \pi^2 \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\pi}{\left(\frac{2\pi}{s}\right)} \right\}$$

$$= \pi^2 \lim_{\left(\frac{2\pi}{s}\right) \rightarrow 0} \left\{ \frac{\pi}{\left(\frac{2\pi}{s}\right)} \right\}$$

$$= \pi^2 \quad (\text{अनुच्छेद ३.२१ से})$$

इसलिए किसी वृत्त का क्षेत्रफल

$$= \pi \times (\text{उसकी त्रिज्या का वर्ग})$$

१२.६ उदाहरण— $\sqrt{3}$ पाद त्रिज्या के एक वृत्त का परिलेखन करने वाले नियमित षड्भुज (hexagon) का परिमाण और क्षेत्रफल निश्चित करो।

मान लो षड्भुज की प्रत्येक भुजा की लम्बाई y है।

तब, $y = \frac{y}{2}$ कोस $\frac{y}{2}$ सपन्ध से,

$$\sqrt{3} = \frac{y}{2} \text{ कोस } \frac{y}{2} = \frac{y}{2} \sqrt{3}$$

$\therefore y = 2$ पाद

\therefore षड्भुज का परिमाण $= 2 \times 6 = 12$ पाद
और षड्भुज का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= \frac{6 \cdot y^2}{4} \text{ कोस } \frac{y}{2} \\ &\quad [\text{अनुच्छेद २.४ सूत्र (अ) से}] \\ &= \frac{6 \cdot 4 \cdot \sqrt{3}}{4} \\ &= 6 \sqrt{3} \text{ वर्ग पाद} \end{aligned}$$

प्रश्नावलि १७

- (१) सभुजाओं के एक नियमित षड्भुज में अंतर्लिखित वृत्त और उसके परिलेखी की त्रिज्याएं क्रमशः $\frac{1}{2}$ और $\frac{\sqrt{3}}{2}$ हैं और षड्भुज की प्रत्येक भुजा की लम्बाई y है।

सिद्ध करो कि

$$\frac{\text{त्रा}}{\text{प्र}} = \frac{?}{\text{काज्या} \frac{\text{प्या}}{\text{स}}}, \text{ और } (\text{त्रा} + \text{प्र}) = \frac{\text{य}}{२} \text{ को रूप } \frac{\text{प्या}}{२\text{स}}$$

(२) ४ पाद त्रिज्या के एक वृत्त में अंतर्लिखित नियमित षट्भुज का परिमाण और क्षेत्रफल निश्चित करो ।

(३) यदि किसी समायत (square) और किसी नियमित षट्भुज (octagon) के परिमाण समान हों तो सिद्ध करो कि उनके क्षेत्रफल २: $\sqrt{२} + १$ निष्पत्ति में हैं ।

(४) सिद्ध करो कि किसी वृत्त का परिलेखन करने वाले नियमित षट्भुज और उसमें अंतर्लिखित नियमित षट्भुज के क्षेत्रफलों की निष्पत्ति २ $\sqrt{२}$ ($\sqrt{२} - १$) है ।
[नागपुर १९३२]

(५) एक नियमित षट्भुज के द्वारा परिलिखित किसी वृत्त में एक समत्रिभुज अंतर्लिखित किया गया है ।

सिद्ध करो कि परिलेखी षट्भुज, वृत्त और अंतर्लिखित

त्रिभुज के परिमाणों की निष्पत्ति ४: $\frac{२\text{प्या}}{\sqrt{३}}$: ३ है और

उनके क्षेत्रफलों की निष्पत्ति ८: $\frac{४\text{प्या}}{\sqrt{३}}$: ३ है ।

- (६) यदि एक वृत्त में अंतर्लिखित नियमित पंचभुज (pentagon) षड्भुज और दशभुज (decagon) की भुजाओं की लम्बाइयां क्रमशः त, थ और द हों तो सिद्ध करो कि, $t^2 = थ^2 + द^2$ [मैसूर १९८३]
- (७) यदि किसी भी संख्या की भुजाओं का एक नियमित बहुभुज एक वृत्त में अंतर्लिखित हो और उसी संख्या की भुजाओं का एक नियमित बहुभुज उसी वृत्त का परिलेखन करता हो तो सिद्ध करो कि
- परिलेखी बहुभुज का क्षेत्रफल
परिलेखी बहुभुज की परित्रिज्या
 = अंतर्लिखित बहुभुज का सामिपरिमाण ' [मद्रास १९४१]

तेरहवां अध्याय

छेदा (logarithm)

१३.१ परिभाषा— यदि क कोई संख्या हो और य और त ऐसी दो दूसरी संख्याएं हों कि $k^y = t$ तो संख्या य आधार क पर त की छेदा कहलाती है और इसे 'छेकत' इस प्रकार लिखते हैं। ('छेकत' को 'छेदा त आधार क' पढ़ा जाता है।)

इस प्रकार किसी दिए हुए आधार पर किसी भी संख्या की छेदा वह घातांक है जिस तक आधार का उच्चयन करने से वृत्त संख्या प्राप्त होती है।

उदाहरणार्थ, $6^2 = 36$, $\therefore 2 = \text{छे}, 36$

$10^3 = 1000$, $\therefore 3 = \text{छे}, 1000$

$2^{-1} = 0.5$, $\therefore -1 = \text{छे}, 0.5$

यह ध्यान में रखना चाहिए कि भिन्न-भिन्न, आधारों पर एक ही संख्या की भिन्न भिन्न छेदाएं होती हैं; जैसे,

$3^4 = 81$, और $9^2 = 81$
 $\therefore \text{छे}_3 81 = 4$ और $\text{छे}_9 81 = 2$

१३.२ कुछ विशिष्ट छेदाएं—

(१) यदि क कोई परिमित राशि हो, तो सदा $k^0 = 1$

$$\therefore \text{छेद } k^0 = 1$$

अर्थात् किसी भी आधार पर १ की छेदा सदा शून्य होती है।

(२) यदि क कोई राशि हो, तो $k^1 = k$

$$\therefore \text{छेद } k^1 = k$$

अर्थात् किसी भी राशि की छेदा, उसी आधार पर, १ होती है।

(३) यदि $k > 1$, तो $k^\infty = \infty$

$$\therefore \text{छेद } k^\infty = \infty, k > 1$$

(४) यदि $k > 1$, तो $k^{-\infty} = 0$

$$\therefore \text{छेद } k^{-\infty} = 0, k > 1$$

१३.३ छेदा के मूलभूत नियम—योजगणित से यह ज्ञात है कि क, य, र इन किन्हीं भी तीन राशियों में घातांक-नियम (laws of indices) सदा सत्य होते हैं—

$$(१) \quad k^y \times k^r = k^{(y+r)}$$

$$(२) \quad \frac{k^y}{k^r} = k^{(y-r)}$$

$$(३) \quad (k^y)^r = k^{y \times r}$$

इन्हीं तीन नियमों के संवादी, तीन मूलभूत नियम छेदा के लिए भी सत्य होते हैं।

यदि क, म, न, तीन वास्तविक (real) राशियाँ हों, तो

$$(१) \text{छेक (म.न)} = \text{छेकम} + \text{छेकन}$$

$$(२) \text{छेक} \left(\frac{\text{म}}{\text{न}} \right) = \text{छेकम} - \text{छेकन}$$

$$(३) \text{छेक (म}^{\text{न}}) = \text{न. छेकम}$$

१३.३१ (१) यह सिद्ध करना है कि

$$\text{छेक (म.न)} = \text{छेकम} + \text{छेकन}$$

मान लो छेकम = य और छेकन = र

अब परिमाणानुसार म = क^य और न = क^र

$$\text{तो म.न} = \text{क}^{\text{य.र}} = \text{क}^{\text{य} + \text{र}}$$

$$\therefore \text{छेक म.न} = \text{य} + \text{र}$$

$$= \text{छेकम} + \text{छेकन}$$

अर्थात् किसी दत्त आधार पर दो राशियों के गुणन-फल की छेदा उसी आधार पर इन्हीं राशियों की छेदाओं के योग-फल के सम होती है।

१३.३२ (२) यह सिद्ध करना है कि

$$\text{छेक} \left(\frac{\text{म}}{\text{न}} \right) = \text{छेकम} - \text{छेकन}$$

मान लो छेकम = य और छेकन = र

अब परिभाषानुसार,

$$म = क^य \text{ और } न = क^र$$

$$\text{तो } \frac{म}{न} = \frac{क^य}{क^र} = क^{य-र}$$

$$\therefore \text{छेक} \left(\frac{म}{न} \right) = य - र$$

$$= \text{छेकम} - \text{छेकन}$$

अर्थात् किसी दत्त आधार पर दो राशियों के भागफल की छेदा, उसी आधार पर, उन्हीं राशियों की छेदाओं के वियोगफल के सम होती है।

$$\text{उपप्रेम १— } \text{छेक} \frac{१}{त} = -\text{छेकत}$$

उपप्रेम २—

$$\begin{aligned} \text{छेक} \left(\frac{त \times थ \times द \times \dots}{प \times फ \times ब \times \dots} \right) &= (\text{छेकत} + \text{छेकथ} + \text{छेकद} + \dots) \\ &\quad - (\text{छेकप} + \text{छेकफ} + \text{छेकब} + \dots) \end{aligned}$$

१३.३३ (३) यह सिद्ध करना है कि

$$\text{छेक} (म^n) = न \text{ छेकम}$$

$$\text{मान लो } \text{छेकम} = य \quad \therefore म = क^य$$

$$\text{तो } (म^n) = (क^य)^न = क^{नय}$$

$$\therefore \text{छेक (म}^n) = \text{न.य}$$

$$= \text{नछेकम}$$

अर्थात् किसी दत्त आधार पर किसी घातयुक्त संख्या की छेदा, उस घात और दत्त आधार पर उस संख्या की छेदा के गुणनफल के सम होती है।

उपप्रेम—

$$\text{छेक (त}^य\text{थ}^र\text{व}^ल\dots) = \text{यछेकत} + \text{रछेकथ} + \text{लछेकद} + \dots$$

१३.३४ अब यह सिद्ध किया जायगा कि

$$\text{छेकम} = \text{छेकम} \times \text{छेकल}$$

$$\text{मान लो } \text{छेकम} = \text{य}, \text{छेकल} = \text{र}$$

$$\text{अब म} = \text{ल}^य \text{ और ल} = \text{म}^र$$

$$\text{तो म} = \text{ल}^य = (\text{म}^र)^य = \text{म}^{\text{र}^य}$$

$$\therefore \text{छेकम} = \text{य}^{\text{र}}$$

$$= (\text{छेकम}) (\text{छेकल})$$

यह सूत्र, इस प्रकार भी लिखा जा सकता है—

$$\text{छेकम} = \frac{\text{छेकम}}{\text{छेकल}}$$

अर्थात् यदि एक ही आधार पर दो संख्याओं की छेदाएं ज्ञात हों तो उनमें से एक को आधार मान कर उस आधार पर दूसरी संख्या की छेदा भी निश्चित की जा सकती है।

उपप्रमेय— ऊपर के सूत्र में, $m = 1$ रखने से

$$\log_k k = \log_{10} k \times \log_{10} k$$

$$\text{परन्तु } \log_k k = 1$$

$$\therefore 1 = \log_{10} k \times \log_{10} k$$

$$\text{अथवा } \log_{10} k = \frac{1}{\log_k k}$$

१३.३ छेदाओं की सामान्य प्रणाली अथवा दशच्छेदा प्रणाली—

छेदाओं की सामान्य प्रणाली में आधार १० लिया जाता है, और इस प्रणाली को सामान्य प्रणाली अथवा दशच्छेदा प्रणाली (common system of logarithms) कहते हैं। आधार १० पर संख्याओं की छेदाएं निश्चय कर, ये सारणी के रूप में एकत्र की गई हैं। यह आधार १० प्रायः लिखा नहीं जाता, केवल मान लिया जाता है। इन सारणियों की सहायता से किसी भी संख्या की छेदा सरलता से निश्चित की जा सकती है; विलोमक्रम से यदि किसी भी संख्या की छेदा ज्ञात हो तो वह संख्या भी निश्चित की जा सकती है।

१३.४ लक्षण (characteristic) और दशमिकांश (mantissa)—

छेदा के अनुफल (integral) भाग को उसका लक्षण और दशमिक (decimal) भाग को उसका दशमिकांश कहते हैं।

यदि किसी संख्या की छेदा ऋण होते हुए अंशतः अनुकूल और अंशतः दशमिक हो, तो दशमिक भाग का उपयुक्त प्रकार से रूपांतर कर सदा धन रखा जाता है। अतः किसी भी संख्या की छेदा का दशमिकांश सदा धन होता है।

उदाहरणार्थ— यदि किसी संख्या की छेदा -४.४५६१ हो, तो उसे $(-५ + .५४३९)$ अथवा संक्षेप में ५.५४३९ लिखते हैं। लक्षण के ऊपर की रेखा यह दर्शाती है कि लक्षण ही ऋण है किंतु दशमिकांश धन है।

१३.५१ अब यह बतलाया जायगा कि किसी भी संख्या की सामान्य छेदा का लक्षण केवल निरीक्षण से किस प्रकार लिखा जा सकता है।

(१) प्रथम मान लो कि दत्त संख्या १ से बड़ी है।

तो परिभाषानुसार $१०^० = १$ \therefore छेदा $१ = ०$

$१०^१ = १०$ \therefore छेदा $१० = १$

$१०^२ = १००$ \therefore छेदा $१०० = २$

$१०^३ = १०००$ \therefore छेदा $१००० = ३$

इत्यादि

इसलिए १ और १० के बीच की किसी भी संख्या की छेदा ० और १ के बीच होती है; अतः उसकी छेदा दशमिक भिन्न होती है और उसका लक्षण शून्य होता है।

१० और १०० के बीच की किसी भी संख्या की छेदा १ और २ के बीच होती है; अतः उसका लक्षण १ होता है।

इसी प्रकार १०० और १००० के बीच की किसी भी संख्या की छेदा का लक्षण २ होता है।

इसलिए नियम यह है— १ से बड़ी किसी भी संख्या की छेदा का लक्षण धन, और उस संख्या के अनुकूल भाग के अंको (digits) की संख्या से १ कम होता है।

उदाहरणार्थ— ३९७.४ के अनुकूल भाग में ३ अंक हैं, अतः उसकी छेदा का लक्षण २ है। इसी प्रकार छे ५०.१, छे २.१२३ छे ३१५५ के लक्षण क्रमशः १, ०, ३ हैं।

(२) अब, मान लो कि दत्त संख्या १ से छोटी है।

तो परिभाषानुसार $१०^० = १$, \therefore छे $१ = ०$

$$१०^{-१} = \frac{१}{१०} = .१, \therefore \text{छे } .१ = -१$$

$$१०^{-२} = \frac{१}{१०^२} = .०१, \therefore \text{छे } .०१ = -२$$

$$१०^{-३} = \frac{१}{१०^३} = .००१, \therefore \text{छे } .००१ = -३$$

इत्यादि

१ और .१ के बीच की किसी भी संख्या की छेदा ० और -१ के बीच होती है; इसलिए यह छेदा (-१ + कोई दशमिक) के सम होती है; अर्थात् उसका लक्षण १ होता है।

१ और ०१ के बीच की किसी भी संख्या की छेदा -१ और -२ के बीच होती है; अतः यह छेदा $(-२ + \text{कोई दशमिक})$ के सम होती है; अर्थात्, उसका लक्षण २ होता है।

इसी प्रकार, ०१ और ००१ के बीच की किसी भी संख्या की छेदा का लक्षण ३ होता है।

इसलिए नियम यह है—

१ से छोटी किसी भी संख्या की छेदा का लक्षण शून्य, तथा संख्यात्मक दृष्टिसे, दशमिक बिन्दु के पश्चात् आने वाले शून्यों की संख्या से १ अधिक होता है।

उदाहरणार्थ— छे०१२८, छे०००२६८१, छे०४६२, छे००२०२ के लक्षण क्रमशः १, ४, २, ३ हैं।

१३.५२ अब दशमिकांश सम्बन्धी एक प्रमेय सिद्ध किया जायगा।

यदि दो संख्याओं के अंश एक ही हों और एक ही क्रम में हों, तथा उनमें केवल दशमिक बिन्दुओं की स्थितियाँ भिन्न हों, तो उनकी छेदाओं के दशमिकांश एक ही होते हैं।

मान लो क और ख ऐसी दो संख्याएँ हैं जिनके अंश एक ही हैं और एक ही क्रम में हैं और जिनमें केवल दशमिक बिन्दुओं की स्थितियाँ भिन्न हैं।

१० और १०० के बीच की किसी भी संख्या की छेदा १ और २ के बीच होती है; अतः उसका लक्षण १ होता है।

इसी प्रकार १०० और १००० के बीच की किसी भी संख्या की छेदा का लक्षण २ होता है।

इसलिए नियम यह है— १ से बड़ी किसी भी संख्या की छेदा का लक्षण घटा, और उस संख्या के अनुकूल भाग के अंकों (digits) की संख्या से १ कम होता है।

उदाहरणार्थ— ३९७०८ के अनुकूल भाग में ३ अंक हैं, अतः उसकी छेदा का लक्षण २ है। इसी प्रकार छे ५०.१, छे २.१२३ छे ३१५५ के लक्षण क्रमशः १, ०, ३ हैं।

(२) अब, मान लो कि दत्त संख्या १ से छोटी है।

तो परिभाषानुसार $१०^० = १$, \therefore छे १ = ०

$$१०^{-१} = \frac{१}{१०} = .१, \therefore \text{छे } .१ = -१$$

$$१०^{-२} = \frac{१}{१०^२} = .०१, \therefore \text{छे } .०१ = -२$$

$$१०^{-३} = \frac{१}{१०^३} = .००१, \therefore \text{छे } .००१ = -३$$

इत्यादि

१ और .१ के बीच की किसी भी संख्या की छेदा ० और -१ के बीच होती है; इसलिए यह छेदा (-१ + कोई दशमिक) के सम होती है; अर्थात् उसका लक्षण १ होता है।

०१ और ००१ के बीच की किसी भी संख्या की छेदा -१ और -२ के बीच होती है; अतः यह छेदा $(-२ + \text{कोई दशमिक})$ के सम होती है; अर्थात्, उसका लक्षण २ होता है।

इसी प्रकार, ००१ और ०००१ के बीच की किसी भी संख्या की छेदा का लक्षण ३ होता है।

इसलिए नियम यह है—

१ से छोटी किसी भी संख्या की छेदा का लक्षण ऋण, तथा संख्यात्मक दृष्टिसे, दशमिक बिन्दु के पश्चात् आत घाले शून्यों की संख्या से १ अधिक होता है।

उदाहरणार्थ — छे०७१२८, छे०००२६८१, छे०४६२, छे००९०२ के लक्षण क्रमशः १, ४, २, ३ हैं।

१३.५२ अब दशमिकांश सम्यन्धी एक प्रमेय सिद्ध किया जायगा।

यदि दो संख्याओं के अंक एक ही हों और एक ही क्रम में हों, तथा उनमें केवल दशमिक बिन्दुओं की स्थितियां भिन्न हों, तो उनकी छेदाओं के दशमिकांश एक ही होते हैं।

मान लो क और ख ऐसी दो संख्याएं हैं जिनके अंक एक ही हैं और एक ही क्रम में हैं और जिनमें केवल दशमिक बिन्दुओं की स्थितियां भिन्न हैं।

$$\text{छे} \cdot 008192 = \text{छे} \left(\frac{8192}{101} \right)$$

$$= \text{छे} 8192 - \text{छे} 101$$

$$= 3 \cdot 6194 - 6 = 3 \cdot 6194$$

$$\text{छे } 8192.00 = \text{छे} (8192 \times 100)$$

$$= \text{छे} 8192 + \text{छे} 100$$

$$= 3 \cdot 6194 + 2 = 4 \cdot 6194$$

इससे यह स्पष्ट है कि ४, ८, ९, २ इस क्रम में इन्हीं अंको द्वारा सभी संख्याओं की (जिनमें दशमिक बिन्दुओं की स्थितियाँ भिन्न २ हैं) छेदाओं के दशमिकांश एक ही हैं। विद्यार्थियों को ध्यान में रखना चाहिए कि ऊपर दी हुई प्रत्येक संख्या की छेदा का लक्षण गतानुच्छेद के नियमों के अनुसार तुरंत निकाला जा सकता है।

१३.६ छेदाओं और प्रतिच्छेदाओं (antilogarithms) की सारणियाँ—

केसल की छेदाओं की सारणी से १ से लेकर १०००० तक की किसी भी संख्या की छेदा निश्चित की जा सकती है। इन सारणियों में दशमिक बिन्दु न देकर चार अंको तक शुद्ध दशमिकांश दिए गए हैं। अनुच्छेद १३.५१ में दिए नियमों के अनुसार उनके लक्षण निकाले जा सकते हैं।

१३.६१ उदाहरण— छे $\cdot 2367$ निकालो।

निरीक्षण से छे $\cdot 2367$ का लक्षण १ है।

\therefore छे $\cdot 2367 = 1 + \text{छे } 2367$ का दशमिकांश

तो ख = क.१०^म

(जहां स धन अथवा ऋण कोई पूर्णांक है)

$$\begin{aligned}\text{छे ख} &= \text{छे (क १०^म)} \\ &= \text{छे क} + \text{छे १०^म} \\ &= \text{छे क} + \text{स} \cdot \text{छे १०} \\ &= \text{छे क} + \text{स}\end{aligned}$$

$$\cdot \text{ छे ख} - \text{छे क} = \text{स}$$

इस प्रकार छेख और छेक में केवल एक अनुफल संख्या का ही अन्तर है। अतः, उनके दशमिकांश एक ही हैं। यह इस उदाहरण से अधिक स्पष्ट हो जायगा।

मान लो छे ४८९२ = ३.६८९५ दिया गया है।

$$\begin{aligned}\text{तो छे ४८९.२} &= \text{छे } \frac{४८९२}{१०} \\ &= \text{छे ४८९२} - \text{छे १०} \\ &= ३.६८९५ - १ \\ &= २.६८९५\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{इसी प्रकार छे ४.८९२} &= \text{छे } \frac{४८९२}{१०००} \\ &= \text{छे ४८९२} - \text{छे १०००} \\ &= ३.६८९५ - ३ \\ &= ०.६८९५\end{aligned}$$

$$\text{छे} \cdot 008492 = \text{छे} \left(\frac{8492}{101} \right)$$

$$= \text{छे} 8492 - \text{छे} 101$$

$$= 3.6494 - 4 = 3.6494$$

$$\text{छे } 849200 = \text{छे} (8492 \times 100)$$

$$= \text{छे} 8492 + \text{छे} 100$$

$$= 3.6494 + 2 = 5.6494$$

इससे यह स्पष्ट है कि ४, ८, ९, २ इस क्रम में इन्हीं अंको द्वारा घनी संख्याओं की (जिनमें दशमिक बिन्दुओं की स्थितियां भिन्न २ है) छेदाओं के दशमिकांश एक ही हैं। विद्यार्थियों को ध्यान में रखना चाहिए कि ऊपर दी हुई प्रत्येक संख्या की छेदा का लक्षण गतानुच्छेद के नियमों के अनुसार तुरंत निकाला जा सकता है।

१३.६ छेदाओं और प्रतिच्छेदाओं (antilogarithms) की सारणियां—

कैसल की छेदाओं की सारणी से १ से लेकर १०००० तक की किसी भी संख्या की छेदा निश्चित की जा सकती है। इन सारणियों में दशमिक बिन्दु न देकर चार अंको तक शुद्ध दशमिकांश दिए गए हैं। अनुच्छेद १३.५१ में दिए नियमों के अनुसार उनके लक्षण निकाले जा सकते हैं।

१३.६१ उदाहरण— छे $\cdot 2347$ निकालो।

निरीक्षण से छे $\cdot 2347$ का लक्षण १ है।

\therefore छे $\cdot 2347 = 1 + \text{छे } 2347$ का दशमिकांश

छेदा सारणी में प्रथम स्तम्भ (column) में २३ और शीर्षपंक्ति (top row) में ८ को देखा जाता है; जिससे २३ की रेखा में ८ के नीचे ३७६६ मिलता है। २३८७ के चतुर्थ अंक ७ के लिए अन्तर स्तम्भ (difference column) का अवलोकन किया जाता है। उसमें ७ के नीचे २३ की रेखा में १३ दिया है। अब इस १३ को ३७६६ में जोड़ दिया जाता है। योगफल ३७७९ ही अपेक्षित दशमिकांश है।

$$\therefore \text{छे} \cdot २३८७ = १.३७७९$$

उदाहरण— (१) छे ०९८७ (२) छे ६६६६
और (३) छे २५.४२ निकालो।

१३-६२ कई बार, की हुई छेदा से उस छेदा वाली संख्या को निकालने का विलोम (converse) प्रश्न पूछा जाता है। यह प्रतिच्छेदा सारणी की सहायता से निकाल सकते हैं।

उदाहरण— वह संख्या निकालो जिसकी छेदा २.२८६२ हो।

$$\text{यहां दशमिकांश} = २८६२$$

प्रतिच्छेदा सारणी में २८ को प्रथम स्तम्भ में, और ६ को शीर्षपंक्ति में देखा जाता है। २८ की रेखा में ६ के नीचे १९३२ मिलता है। दशमिकांश के चतुर्थ अंक २ के लिए अन्तर-स्तम्भ का अवलोकन किया जाता है। यहां २८

की रेखा में २ के नीचे १ मिलता है। इस अंतर का १९३२ में योग करने से १९३३ मिलता है। इसलिए दशमिकांश २८६२ वाली संख्या १९३३ है। परन्तु दत्त लक्षण २ है।

अतः दशमिक विन्दु तीन अंको के पश्चात् आयगा।
इसलिए अपेक्षित संख्या १९३.३ है।

उदाहरण— (१) १.१७६२ (२) ८५०१

और (३) ३.४ छेदाओं वाली संख्याओं का निश्चय करो।

१३.७ त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों की सारणियां—

०° से ९०° तक के एक-एक कला से बढ़ाए गए, सय कोणों की ज्या, कोटिज्या और स्पर्शज्या की सारणियां बनाई गई हैं। इस प्रकार की सारणियों को क्रमशः प्राकृत (natural) ज्या सारणी, प्राकृत कोटिज्या सारणी और प्राकृत स्पर्शज्या सारणी कहते हैं।

कभी-कभी त्रिकोणमितीय पदसंहतियों की मर्हाओं का निश्चय करना पड़ता है।

$$\text{उदाहरणार्थ, य} = \frac{\text{ज्या } २०^{\circ} ३५' \times \text{कोज्या } ५४^{\circ} ४०'}{\text{स्प } ३३^{\circ} २४'}$$

$$\therefore \text{छेय} = \text{छे ज्या } २०^{\circ} ३५' + \text{छे कोज्या } ५४^{\circ} ४०' - \text{छे स्प } ३३^{\circ} २४'$$

त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों की छेदाओं का निश्चय करने के लिये, पहिले इन निष्पत्तियों की अर्थां प्राकृत ज्या, कोटिज्या और स्पर्शज्या सारणियों से निकालनी पड़ती है, पश्चात् इन अर्थां की छेदाएं छेदा सारणी में निश्चित की जाती हैं। इस दुगुने पार्थम्य से बचाने के लिए, 0° से 90° तक के सब कोणों की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों की छेदाओं को निश्चय कर उनकी पृथक् सारणियां बनाई गई हैं। इस प्रकार की सारणियों को छेदा ज्या सारणी, छेदा कोटिज्या सारणी और छेदा स्पर्शज्या सारणी कहते हैं।

१३.८ संख्यात्मक गणनाओं (calculations) में छेदाओं का प्रधान उपयोग यह होता है कि वे गुणनफलों का योग में और भागफलों का त्रियोग में रूपांतर कर देते हैं। इसके अतिरिक्त, वे किसी सरया को घातांक द्वारा उच्चयन करने, अथवा उत्तका मूल निकालने की क्लिष्ट विधाओं का क्रमशः गुणा और भाग में रूपांतर कर देते हैं। यह निम्नलिखित उदाहरणों से स्पष्ट हो जायगा।

उदाहरण १— ८३.२४ के ११ वें मूल की अर्हा स्थूल से निकालो।

$$\text{मान लो } y = (८३.२४)^{\frac{1}{11}}$$

$$\therefore \text{छेय} = \frac{१}{११} \text{ छे } ८३.२४$$

छेदा सारणी से,

$$\text{छे } ८३ \cdot २५ = १ \cdot ९२०३$$

$$\therefore \text{छे } y = \frac{१}{११} \times १ \cdot ९२०३$$

$$= ० \cdot १७४६ \text{ लगभग}$$

प्रतिच्छेदा सारणी से,

$$० \cdot १७४६ = \text{छे } १ \cdot ४९५$$

$$\therefore \text{छे } y = \text{छे } १ \cdot ४९५$$

$$\text{अथवा } y = १ \cdot ४९५$$

उदाहरण २—

$$\sqrt[4]{\frac{(५९)^० \times ४ \sqrt{७२}}{(९३)^३ \times ३ \sqrt{१९}}} \text{ की अर्धा निकालो।}$$

मान लो अपेक्षित अर्धा य है;

$$\text{अतः छे } y = \text{छे } \left\{ \frac{(५९)^० \times (७२)^{\frac{१}{२}}}{(९३)^३ \times (१९)^{\frac{१}{३}}} \right\}^{\frac{१}{४}}$$

$$= \frac{१}{४} \left[\text{छे}(५९)^० + \text{छे}(७२)^{\frac{१}{२}} - \text{छे}(९३)^३ - \text{छे}(१९)^{\frac{१}{३}} \right]$$

$$= \frac{१}{४} \left[७ \text{छे } ५९ + \frac{१}{२} \text{छे } ७२ - ३ \text{छे } ९३ - \frac{१}{३} \text{छे } १९ \right]$$

छेदा-सारणी से,

$$\text{छे } ५९ = १ \cdot ७७०९$$

$$\text{छे } ७२ = १ \cdot ८१७३$$

$$\text{છે } ૧૩ = ૧.૨૬૮૫$$

$$\text{છે } ૧૯ = ૧.૨૭૮૮$$

$$\therefore \text{છે } y = \frac{૧}{૫} [(૭ \times ૧.૭૭૦૯) + (\frac{૧}{૪} \times ૧.૮૫૭૩) - (૩ \times ૧.૨૬૮૫) - (\frac{૧}{૩} \times ૧.૨૭૮૮)]$$

$$= \frac{૧}{૫} \times ૬.૧૨૮૨$$

$$= ૧.૨૦૫૮ \quad \text{લગભગ}$$

$$= \text{છે } ૨૦.૨૨ \quad \text{પ્રતિષ્ઠેદા સારણી સે.}$$

$$\therefore y = ૨૦.૨૨$$

ઉદાહરણ ૩— સિદ્ધ કરો કિ—

$$૬ \text{ છે } \frac{૧૦}{૯} + ૨ \text{ છે } \frac{૨૪}{૨૫} - \text{છે } \frac{૩}{૫} + ૩ \text{ છે } \frac{૮૧}{૮૦} = \text{છે } ૩$$

$$\text{વામપક્ષ} = \text{છે } \left(\frac{૧૦}{૯}\right)^૧ + \text{છે } \left(\frac{૨૪}{૨૫}\right)^૨ - \text{છે } \left(\frac{૩}{૫}\right) + \text{છે } \left(\frac{૮૧}{૮૦}\right)^૩$$

$$= \text{છે } \left[\frac{\left(\frac{૧૦}{૯}\right)^૧ \left(\frac{૨૪}{૨૫}\right)^૨ \left(\frac{૮૧}{૮૦}\right)^૩}{\left(\frac{૩}{૫}\right)} \right]$$

$$= \text{छे. १} \left\{ \left(\frac{५ \times २}{३^२} \right)^१ \times \left(\frac{३ \times २^३}{५^२} \right)^२ \times \left(\frac{३^४}{५ \times २^४} \right)^३ \times \frac{५}{३} \right\}$$

$$= \text{छे.} \left\{ \frac{५^०.२^१२.३^१४}{५^०.२^१२.३^१३} \right\}$$

$$= \text{छे. ३} = \text{दक्षिण पक्ष}$$

अन्यथा

$$\begin{aligned} \text{ग्रामपक्ष} &= ६ \text{ छे.} \left(\frac{५.२}{३^२} \right) + २ \text{ छे.} \left(\frac{२^३.३}{५^२} \right) - \text{छे.} \left(\frac{३}{५} \right) \\ &\quad + ३ \text{ छे.} \left(\frac{३^४}{२^४.५} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= ६ (\text{छे. १} + \text{छे. २} - २ \text{ छे. ३}) \\ &\quad + २ (३ \text{ छे. २} + \text{छे. ३} - २ \text{ छे. ५}) - (\text{छे. ३} - \text{छे. ५}) \\ &\quad + ३ (४ \text{ छे. ३} - ४ \text{ छे. २} - \text{छे. ५}) \end{aligned}$$

$$= \text{छे. ३} = \text{दक्षिण पक्ष}$$

उदाहरण ४— भाधार ७ पर ३७ की छेदा निकालो ।

अनुच्छेद १३.३४ से,

$$\text{छे. ३७} = \text{छे. १. २७} \times \text{छे. २०}$$

$$= \frac{\text{छे. १. ३७}}{\text{छे. १. ७}}$$

$$= \frac{1.4662}{.6811}$$

छेदासारणी से

$$= 1.01196$$

उदाहरण ५— समीकार $\frac{337}{11^{2y+1}} = 10^{y-1}$ का स्थूल रूप से साधन करो।

दोनों पक्षों की छेदाएं लेने पर,

$$3 \text{ य छे } 3 - (2y + 1) \text{ छे } 11 = (y - 1) \text{ छे } 10 = (y - 1)$$

$$\therefore y = \frac{1 - \text{छे } 11}{1 + 2 \text{ छे } 11 - 3 \text{ छे } 3}$$

$$= \frac{1 - 1.0418}{1 + 2.0626 - 3.4313}$$

छेदासारणी से

$$= \frac{-0.0418}{1.6414}$$

$$= -0.2509 \text{ लगभग}$$

१३.९ अनुपाती भागों का प्रनियम (principle of proportional parts)—

छेदा सारणी से चार अंकों की किसी भी संख्या की छेदा निकाल सकते हैं। परन्तु, मान लो २५६३ और २५६४ के बीच की किसी संख्या की छेदा निकालनी है;

उदाहरणार्थ, २५६३.६ की छेदा निकालनी है। ऐसी दशा में अनुपाती भागों के प्रनियम का प्रयोग होता है; इस प्रनियम का यह अर्थ है कि किसी संख्या की वृद्धि उसकी छेदा के अनुपात में होती है।

ये उदाहरण इस प्रनियम का प्रयोग दर्शाते हैं।

उदाहरण १— छे ७२.३५७ निकालो।

प्रथम ७२३५ और ७२३६ की छेदाएं निश्चित की जायंगी।

छेदासारणी से, छे ७२३६ = ३.८५९५

छे ७२३५ = ३.८५९४

∴ छे ७२३६ - छे ७२३५ = ०.०००१

इसलिए जब संख्या में १ की वृद्धि होती है, तब उसकी छेदा में ०.०००१ की वृद्धि होती है। अतः, अनुपाती भागों के प्रनियम से, संख्या में ७ की वृद्धि के लिये, उसकी छेदा की वृद्धि, $७ \times ०.०००१ = ०.००००७$ होगी।

∴ छे ७२३५.७ = ३.८५९४ + ०.००००७
= ३.८५९४७

∴ छे ७२.३५७ = १.८५९४७

उदाहरण २— यदि कोज्या $३१^{\circ}२३' = ०.८५५३$ हो और १' के लिए अंतर = ०.००१७ हो तो कोज्या $३१^{\circ}२३'४०''$ निकालो।

१' अर्थात् ६०" के लिए अंतर = ०.००१७

∴ ४०" के लिए अंतर = $\frac{४०}{६०} \times ०.००१७$
= ०.००११ लगभग

क्योंकि कोण की वृद्धि के साथ उसकी कोटिज्या न्यून होती है,

$$\begin{aligned}\text{अतः कोज्या } 31^\circ 23' 40'' &= .6443 - .0011 \\ &= .6432\end{aligned}$$

प्रश्नावलि १८

(१) यदि छे $0 = .6841$ और छं $12 = 1.2966$ तो

(क) छे 1.33

(ख) छे 280.1

(ग) छे $1 \sqrt{1.33}$

और (घ) छे $1 \sqrt{.00361}$ निश्चित करो।

(२) $.069$, 2.04 , $.00003$, $1 \sqrt{3696}$ और $(42877)^{\frac{1}{3}}$

की छेदांशों के लक्षण क्या हैं ?

(३) 0.1346 का 0.06023 से गुणन और भाजन करो।

(४) (क) $33.3 \times .0412 \times 2.022$ और

$$(ख) \frac{6.347 \times 11.83 \times .4292}{3.184 \times 1.432}$$

की अर्हायें निकालो।

(५) इनकी अर्हायें निकालो—

$$(क) (.036)^{10}, \left(\frac{1}{6.01}\right)^{25}, (492)^{00}$$

$$(ख) (86)^{\frac{1}{2}}, (2.9)^{\frac{1}{2}}, (.000122)^{\frac{1}{3}}$$

(६) सिद्ध करो।

$$(क) ७ छे \frac{१६}{१५} + ५ छे \frac{२५}{२४} + ३ छे \frac{८१}{८०} = छे २$$

[इलाहाबाद १९३०]

$$(ख) ७ छे \frac{१०}{९} - २ छे \frac{२५}{२४} + ३ छे \frac{८१}{८०} = छे २$$

[कलकत्ता १९२३]

(७) उपसन्न अर्हाणि निकालो।

$$(क) \frac{(२३.५)^२ \times (.५२३)^३}{१ - (.०३५२)^२}$$

[मद्रास १९४२]

$$(ख) \sqrt{\frac{१७^{\frac{५}{२}} \times ३^{\frac{३}{२}}}{\sqrt{५२} \times \sqrt{८९}}}$$

$$(ग) \frac{(\text{ज्या } ७०^{\circ}३३')^{\frac{५}{२}} (\text{स्प } ४०^{\circ}५०')^{\frac{३}{२}}}{(.३३३३)^{\frac{३}{२}} \text{ कोज्या } ५५^{\circ}४'}$$

(८) छे, ८९, छे, ९८, और छे, १४३२ निकालो।

(९) यदि छे, . क = ख, तो छे, . . क और छे, . . . क निकालो।

[धंवाई १९०१]

(१०) किसी भी छेदा प्रणाली का

(क) आधार २ से आधार १२८ में

(ख) आधार ३ से आधार ८१ में

(ग) आधार ४९ से, आधार ७ में परिवर्तन करने वाले गुणक (coefficient) निश्चय करो।

(११) (अ) (१) 2^{100} और (२) 3^{100} में अंको की संख्या निकालो।

(आ) (१) 2^{-100} और (२) 3^{-100} में प्रथम सार्थक अंको की स्थिति बताओ।

(१२) इन समीकरणों को स्थूल रूप से सिद्ध करो—

(१) $7^{2y} - 9(7^y) + 18 = 0$ [भांघ १९३३]

(२) $\frac{2^{2y}}{3^{y-1}} = 7^{y+1}$

(३) $2^{y-1} = 3^{r+1}$, $2^{y-1} \times 7^r = 9$

(१३) यदि छे ९६४१ = ३.९८४१

और छे ९६४२ = ३.९८४२

तो अनुपाती भागों के प्रनियम का प्रयोग कर छे $(.९६४१८)^3$ निकालो।

(१४) यदि स्प $५१^{\circ}६' = १.२३९३$ और स्प $५१^{\circ}७' = १.२४०१$ तो अनुपाती भागों के प्रनियम का प्रयोग कर स्प $५१^{\circ}६'२५''$ की अर्हा निश्चित करो।

चौदहवां अध्याय

त्रिभुजों का निर्धारण

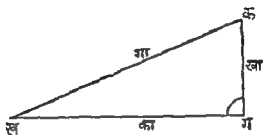
१४०१ त्रिभुज की भुजाओं और कोणों को उसके अवयव (elements) कहते हैं। रैखिकी से यह ज्ञात है कि यदि किसी त्रिभुज के तीन अवयव दिए गए हों और उनमें कम से कम एक भुजा हो, तो उस त्रिभुज की रचना की जा सकती है। इसी प्रकार यदि त्रिभुज के तीन अवयव दिए हों और उनमें कम से कम एक भुजा हो तो उसके शेष तीन अवयव त्रिकोणमिति से निश्चित किए जा सकते हैं। हम विद्या को त्रिभुज का निर्धारण कहते हैं।

पहले की भांति इस अध्याय में भी किसी भी त्रिभुज कर्ण की भुजाएं का, छा, गा और उसके कोण क, ख, ग से दर्शाए गए हैं।

पहले, लंब कोण त्रिभुजों के निर्धारण पर विचार किया जायगा। आने वाले अनुच्छेदों में \angle ग लम्बकोण लिया गया है।

१४.२ दशा १— दो भुजाओं के दिये जाने पर त्रिभुज का निर्धारण करना—

(१) मान लो, भुजाएं का, खा दी हुई हैं।



आ. १४.१

$$\cos K = \frac{\text{का}}{\text{खा}}$$

$$\therefore \text{छे स्प क} = \text{छे का} - \text{छे खा}$$

क्योंकि का और खा भुजाएं दी हुई हैं, अतः छे स्प क प्राप्त होता है और इसलिये क ज्ञात किया जा सकता है।

और अथ, कोण ख, संबंध

$$\text{ख} = 90^\circ - \text{क},$$

से ज्ञात किया जा सकता है।

कर्ण गा निम्नलिखित किसी भी संबंध से निर्दिष्ट किया जा सकता है—

$$\text{गा} = \frac{\text{का}}{\text{ज्या क}}, \text{ गा} = \frac{\text{खा}}{\text{ज्या ख}} \text{ अथवा, गा} = \sqrt{\text{का}^2 + \text{खा}^2}$$

परन्तु संबंध, $\text{गा} = \sqrt{\text{का}^2 + \text{खा}^2}$, छेदाओं की गणना के लिए अनुपयुक्त है; अतः गा निश्चित करने के लिये

$$\text{गा} = \frac{\text{का}}{\text{ज्या क}} \text{ अथवा गा} = \frac{\text{खा}}{\text{ज्या ख}} \text{ संबंध का प्रयोग करना ठीक होगा।}$$

(२) मान लो कर्ण गा और एक भुजा का दी हुई हैं।
आकृति १४१ देखो।

संबंध ज्या क = $\frac{\text{का}}{\text{गा}}$ से कोण क निश्चित किया जा सकता है।

(इस समीकार को और आगे के सब समीकारों को सारणी की सहायता से सिद्ध करना पड़ता है।)

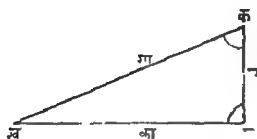
कोण क ज्ञात हो जाने पर, कोण ख = $(90^\circ - \text{क})$ भी ज्ञात हो जाता है।

निम्नलिखित किसी भी संबंध से भुजा खा निश्चित की जा सकती है—

$$\text{खा} = \text{गा.ज्या ख}, \text{ अथवा खा} = \text{का.कोस्य क}$$

$$\text{अथवा खा} = \sqrt{\text{गा}^2 - \text{का}^2}$$

१४२१ दशा २— एक न्यून कोण और एक भुजा के दिए जाने पर त्रिभुज का निर्धारण करना—



आ १४२

(१) मान लो, कोण क और भुजा खा दिए हैं।

तो कोण ख संबंध $ख = 90^\circ - क$ से ज्ञात होता है।

संबंध का = खा रूप क से भुजा का जानी जा सकती है।

संबंध गा = $\frac{खा}{कोज्या क}$ से कर्ण गा ज्ञात होता है।

(२) मान लो कोण क और कर्ण गा दिए हैं—

आकृति १४२ देखो।

पहले की भांति कोण ख संबंध

$ख = 90^\circ - क$ से ज्ञात होता है।

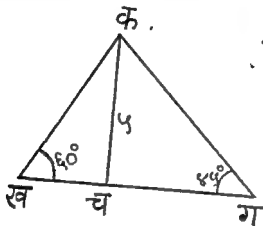
संबंध खा = गा. कोज्या क

का = गा. ज्या क से भुजाएं खा और का ज्ञात

होती हैं।

१४२२ ऊर्चाई और दूरीयों (अध्याय १५) के निर्मेय सिद्ध करने के लिए लंबकोण त्रिभुजों के निर्धारण के ज्ञान की आवश्यकता होती है।

१४.२३ उदाहरण— यदि त्रिभुज कखग में रेखा कच आधार खग पर लंब हो, और $\angle ख = ६०^\circ$, $\angle ग = ४५^\circ$ और कच = ५ हों, तो खा और गा निश्चित करो।



आ. १४.३

$\triangle कचग$ में,

$$\text{ज्या ग} = \frac{\text{कच}}{\text{कग}}$$

$$\text{अथवा ज्या } ४५^\circ = \frac{५}{\text{खा}}$$

$$\therefore \text{खा} = ५\sqrt{२}$$

$\triangle कखच$ में,

$$\text{ज्या ख} = \frac{\text{कच}}{\text{कख}}$$

$$\text{अथवा ज्या } 60^\circ = \frac{4}{\text{गा}}$$

$$\therefore \text{गा} = \frac{4.2}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

उदाहरण २— यदि त्रिभुज कखग में, $\angle क = 90^\circ$, $\text{खा} = 8.4$ और $\text{गा} = 6.9$ हो तो त्रिभुज का निर्धारण करो।



आ. १४०४

$$\text{स्प ख} = \frac{\text{खा}}{\text{गा}}$$

$$= \frac{8.4}{6.9}$$

$$= \frac{84}{69}$$

$$\therefore \text{छे स्प ख} = \text{छे } 84 - \text{छे } 69$$

$$= 1.6532 - 1.0366, \quad \text{छेदासारणी से}$$

$$= -0.3834$$

$$= 1.6166$$

छेद स्पर्शज्या सारणी से,

$$\text{छे स्प } 33^\circ 3' = 1.6166$$

$$\therefore \text{ख} = 33^{\circ} 37' \text{ लगभग}$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{ग} &= 90^{\circ} - \text{ख} \\ &= 90^{\circ} - 33^{\circ} 37' \\ &= 56^{\circ} 23' \text{ लगभग}\end{aligned}$$

$$\text{पुनः का} = \frac{\text{खा}}{\text{ज्या ख}}$$

$$\text{अथवा का} = \frac{4.4}{\text{ज्या } 33^{\circ} 37'}$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{छे का} &= \text{छे } 4.4 - \text{छे ज्या } 33^{\circ} 37' \\ &= 0.4532 - 1.03375, \quad \text{सारणी से} \\ &= 0.4532 + 1 - 1.03375 \\ &= 0.41945 \\ &= \text{छे } 0.234 \quad \text{प्रतिच्छेदा सारणी से} \\ \therefore \text{का} &= 0.234\end{aligned}$$

प्रश्नावलि १९

- (१) कल्पग एक लंब कोण त्रिभुज है, जिसमें ग लंबकोण है । यदि का = १२, खा = $3\sqrt{2}$, तो त्रिभुज का निर्धारण करो ।
- (२) Δ कल्पग में, क = 90° , खा = 40° , ग = 15° तो का और गा भुजाएं निर्दिष्ट करो ।

(३) यदि Δ कखग में, $\angle ग = ९०^\circ$, $खा = ४.३$, और $गा = ८.६$ हो तो त्रिभुज का निर्धारण करो।

(४) यदि Δ कखग में, $\angle ख = ३०^\circ$, $\angle ग = ४०^\circ$ और खग भुजा पर खींचा गया लंब कच $= ९$ पाद तो कख, कग, कच और गच की लंबाइयां निकालो।

१४.३ अब त्रिभुजों के निर्धारण पर विचार किया जायगा।

यह तो ज्ञात ही है कि यदि किसी त्रिभुज के तीन अवयव दिए हों, जिनमें कम से कम एक भुजा हो, तो उस त्रिभुज का पूर्ण रूप से निर्धारण हो सकता है। ये तीन अवयव चार प्रकार से दिए जा सकते हैं—

दशा १— तीन भुजाएं

दशा २— दो भुजाएं और उनके बीच का कोण

दशा ३— एक भुजा और दो कोण

दशा ४— दो भुजाएं और उनमें से एक के सामने का कोण

जब त्रिभुज के केवल तीनों कोण दिए रहते हैं, तो त्रिभुज का निर्धारण सम्भव नहीं होता। इस दशा पर, पृथक् रूप से, अनुच्छेद १४.८ में विचार किया गया है।

१४.४ दशा १— Δ कखग की तीनों भुजाएं दी गई हैं। क्योंकि का, खा, गा ज्ञात हैं, अतः राशियां सा

$\left(= \frac{का + खा + गा}{२} \right)$, $(सा - का)$, $(सा - खा)$ और

$(सा - गा)$ भी ज्ञात हो जाती हैं।

$$\text{अब } \text{स्प}\frac{\text{क}}{2} = \sqrt{\frac{(\text{सा} - \text{खा})(\text{सा} - \text{गा})}{\text{सा}(\text{सा} - \text{का})}}$$

$$\therefore \text{छे}\text{स्प}\frac{\text{क}}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \text{छे}(\text{सा} - \text{खा}) + \text{छे}(\text{सा} - \text{गा}) \right. \\ \left. - \text{छे सा} - \text{छे}(\text{सा} - \text{का}) \right\}$$

इस समीकार से $\frac{\text{क}}{2}$ और इसलिए क, सारणी की सहायता से, निर्दिष्ट किया जा सकता है।

इसी प्रकार, ख , $\text{स्प}\frac{\text{ख}}{2}$ के सूत्र से और ग, सूत्र, $\text{ग} = 180^\circ - \text{क} - \text{ख}$ से निर्दिष्ट किए जा सकते हैं।

क्योंकि ज्या $\text{अ} = \text{ज्या}(180^\circ - \text{अ})$ अतः किसी दो हुई ज्या वाले दो कोण होते हैं और वे परस्पर ऋजुपूरक होते हैं। इसलिए ज्या के सूत्रों से निर्दिष्ट किए गए त्रिभुज के अर्धकोणों की अर्हाणं सम्बिद्ध्य होती हैं और इसलिए कोणों को निश्चय करने के लिये इन सूत्रों का प्रयोग नहीं किया जाता।

परन्तु अर्धकोणों की कोटिज्या के सूत्रों का प्रयोग किया जा सकता है।

$$\text{जैसे, कोज्या}\frac{\text{क}}{2} = \sqrt{\frac{\text{सा}(\text{सा} - \text{का})}{\text{खा. गा}}}$$

$$\text{और कोज्या } \frac{\text{ख}}{2} = \sqrt{\frac{\text{पा}(\text{सा} - \text{खा})}{\text{गा. का}}}$$

अतः इन सूत्रों की सहायता से $\frac{\text{क}}{2}$ और $\frac{\text{ख}}{2}$, बिना किसी सन्दिग्धता के ज्ञात किए जा सकते हैं।

परन्तु इन सूत्रों के प्रयोग में सा, (सा - का), (सा - खा), का, पा, और गा इन ६ राशियों की छेदाएँ निश्चित करनी पड़ती हैं, जब कि न्वादी स्पर्शज्या के सूत्रों के प्रयोग में केवल सा, (सा - का), (सा - खा) और (सा - गा), इन चार राशियों की छेदाओं का निश्चय करने की आवश्यकता है।

इसलिए यदि तीनों कोणों का निश्चय करना हो तो स्पर्शज्या के सूत्रों का ही प्रयोग करना चाहिए; और यदि केवल एक ही कोण निश्चय करना है तो कोटिज्या और स्पर्शज्या के सूत्रों में से किसी का भी प्रयोग कर सकते हैं।

कोटिज्या नियम से भी कोण निश्चय किये जा सकते हैं।

इस प्रकार,

$$\text{कोज्या क} = \frac{\text{खा}^2 + \text{गा}^2 - \text{का}^2}{2 \text{ खा. गा}}$$

$$\text{कोज्या ख} = \frac{\text{गा}^2 + \text{का}^2 - \text{खा}^2}{2 \text{ गा. का}}$$

परन्तु ये सूत्र छेदा-गणना के लिये उपयोगी नहीं हैं और इनका प्रयोग तभी करना चाहिये जब का, खा और गा छोटी संख्याएँ हों।

१४.४१ उदाहरण— यदि \triangle कखग में, का = ४७, खा = ५३ और गा = २२, तो तीनों कोण निर्दिष्ट करो।

$$\text{सा} = \frac{४७ + ५३ + २२}{२} = ६१$$

$$\text{सा} - \text{का} = ६१ - ४७ = १४$$

$$\text{सा} - \text{खा} = ६१ - ५३ = ८$$

$$\text{सा} - \text{गा} = ६१ - २२ = ३९$$

$$\therefore \text{स्प} \frac{\text{क}}{२} = \sqrt{\frac{(\text{सा} - \text{खा})(\text{सा} - \text{गा})}{\text{सा}(\text{सा} - \text{का})}}$$

$$= \sqrt{\frac{८ \times ३९}{६१ \times १४}}$$

$$\therefore \text{छे स्प} \frac{\text{क}}{२} = \frac{१}{२} \{ \text{छे } ८ + \text{छे } ३९ - \text{छे } ६१ - \text{छे } १४ \}$$

$$= \frac{१}{२} \{ २०३१ + १५९११ - १७८५३$$

$$- ११४६१ \} \text{छेदासारणी से,}$$

$$= \frac{१}{२} (-४३७२)$$

$$= -.2166 = 1.7418$$

= छे स्प ३१°९' छेदा-स्पर्शज्या सारणी से

$$\therefore \frac{क}{२} = ३१^{\circ} ९'$$

$$\therefore क = ६२^{\circ} १८'$$

$$\text{पुनः, स्प } \frac{ख}{२} = \sqrt{\frac{(सा - गा) (सा - का)}{सा (सा - खा)}}$$

$$= \sqrt{\frac{३९ \times १४}{६१ \times ८}}$$

$$\text{छे स्प } \frac{ख}{२} = \frac{१}{२} \{ \text{छे } ३९ + \text{छे } १४ - \text{छे } ६१ - \text{छे } ८ \}$$

$$= \frac{१}{२} \{ १.५९११ + १.१४६१ - १.७८५३$$

$$- .२०३१ \}$$

$$= \frac{१}{२} (.०४८८) = .०२४४$$

अथ, छेदा स्पर्शज्या सारणी से,

$$\text{छे स्प } ४६^{\circ} ३६' = .०२४३$$

$$\text{और छे स्प } ४६^{\circ} ३७' = .०२४६$$

\therefore छे स्प $\frac{ख}{२}$, छे स्प $४६^{\circ} ३६'$ और छे स्प $४६^{\circ} ३७'$ के बीच है।

$\therefore \frac{\text{ख}}{2}$ की अर्द्धा $४६^{\circ}३६'$ और $४६^{\circ}३७'$ के बीच है।

$$\text{मान लो } \frac{\text{ख}}{2} = ४६^{\circ}३६' \text{ य}$$

$$\text{तो य के लिये अंतर} = \text{छे स्प } \frac{\text{ख}}{2} - \text{छे स्प } ४६^{\circ}३६'$$

$$= ०२४४ - ०२४३$$

$$= ०००१$$

$$\text{और } ६०'' \text{ के लिये अंतर} = \text{छे स्प } ४६^{\circ}३७'$$

$$- \text{छे स्प } ४६^{\circ}३६'$$

$$= ०२४६ - ०२४३$$

$$= ०००३$$

$$\text{अतः, } \frac{\text{य}}{६०} = \frac{०००१}{०००३} = \frac{१}{३}$$

$$\therefore \text{य} = \frac{६०}{३} = २०$$

$$\therefore \frac{\text{ख}}{2} = ४६^{\circ}३६'२०''$$

$$\therefore \text{रा} = ९३^{\circ}१२'४०''$$

$$\therefore \text{ग} = १८०^{\circ} - \text{क} - \text{ख}$$

$$= १८०^{\circ} - ६२^{\circ}१८' - ९३^{\circ}१२'४०''$$

$$= २४^{\circ}२९'२०''$$

प्रश्नावलि २०

- (१) किसी त्रिभुज की भुजाएँ ८, १० और १२ हैं, तो दिखाओ कि उसका महत्तम कोण उसके लघुतम कोण का दुगुना है।
- (२) किसी त्रिभुज की भुजाएँ ७५३, ३७५ और ८७२ हैं, तो उसका लघुतम कोण निर्दिष्ट करो।
- (३) किसी त्रिभुज की भुजाएँ २ : ३ : ४ अनुपात में हैं; तो उस त्रिभुज का निर्धारण करो। [सन्दास १८९७]
- (४) किसी त्रिभुज की भुजाएँ ५७, १५ और ४८ पाद हैं तो सिद्ध करो कि उसका महत्तम कोण 120° का है।

त्रिभुज कण्ठ का निर्धारण करो, जब

(५) का = २२३, खा = २५६, गा = २८८

(६) का = $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$, खा = $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, गा = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

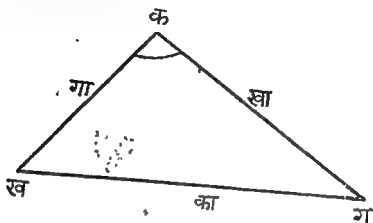
[चत्वारस १९३५]

(७) का = २, खा = $\sqrt{3}+1$, गा = $\sqrt{6}$

(८) का = ३४.५६, खा = ४५.६६, गा = ५६.७८

[आंध्र १९४२]

१४५ दशा २— \triangle कखग की दो भुजाएं और उनके बीच का कोण दिया गया है।



आ. १४५

मान लो, गा और खा भुजाएं और उनके बीच का कोण क दिया हुआ है। मान लो इन दो भुजाओं में खा बड़ी है।

तो अनुच्छेद १०६ से,

$$\text{स्प } \frac{\text{ख}-\text{ग}}{२} = \left(\frac{\text{खा}-\text{गा}}{\text{खा}+\text{गा}} \right) \text{ कोस्प } \frac{\text{क}}{२}$$

$$\therefore \text{छे स्प } \frac{\text{ख}-\text{ग}}{२} = \text{छे } (\text{खा}-\text{गा}) - \text{छे } (\text{खा}+\text{गा}) \\ - \text{छे स्प } \frac{\text{क}}{२} \dots\dots (१)$$

इसके अतिरिक्त $\frac{ख+ग}{२} = ९०^{\circ} - \frac{क}{२} \dots\dots\dots (२)$

संवेध (१) और (२) से $\frac{ख-ग}{२}$ और $\frac{ख+ग}{२}$ प्राप्त होते हैं और इन के योग और वियोग से कोण ख और कोण ग प्राप्त होते हैं।

$$\text{सूत्र, } \frac{\text{का}}{\text{ज्या क}} = \frac{\text{खा}}{\text{ज्या ख}}$$

अथवा, छे का = छे खा + छे ज्या क - छे ज्या ख से का भुजा निश्चित की जा सकती है।

संवेध, का^२ = खा^२ + ग^२ - २ खा ग को ज्या क से भां का भुजा निश्चित की जा सकती है।

पहले की भांति, जब खा और ग छोटी सख्याएं हों, तभी इस सूत्र का प्रयोग करना चाहिए।

१४.५) उदाहरण— किसी त्रिभुज की दो भुजाएं ७:५ निष्पत्ति में हैं और उनके बीच का कोण १०२° ३६' है, तो उसके शेष कोण निकालो।

मान लो, $\frac{\text{खा}}{\text{गा}} = \frac{७}{५}$ और उनके बीच का कोण क = १०२° ३६'।

$$\therefore \text{तो, स्प } \frac{\text{ख-ग}}{२} = \left(\frac{७-५}{७+५} \right) \text{ कोस्प } \left(\frac{१०२^{\circ} ३६'}{२} \right)$$

$$= \frac{1}{6} \text{ कोस्प } 41^{\circ} 14'$$

$$= \frac{1}{6} \text{ स्प } 36^{\circ} 42'$$

$$\therefore \text{छे स्प } \frac{\text{ख} - \text{ग}}{2} = \text{छे स्प } 36^{\circ} 42' - \text{छे } 6$$

$$= 1.037 - .002 \text{ सारणी से}$$

$$= 1.124$$

सारणी से,

$$\text{छे स्प } 36^{\circ} 42' = 1.1242 \text{ और छे स्प } 36^{\circ} 40' = 1.1242$$

$$\therefore \frac{\text{ख} - \text{ग}}{2}, 36^{\circ} 42' \text{ और } 36^{\circ} 40' \text{ के बीच है।}$$

$$\text{मान ली, } \frac{\text{ख} - \text{ग}}{2} = 36^{\circ} 42' \text{ य"}$$

$$\text{तो य" के लिये अंतर} = 1.1244 - 1.1242 = .0002$$

$$\text{और } 60'' \text{ के लिये अंतर} = 1.1242 - 1.1242 = .0010$$

$$\therefore \frac{\text{य}}{60} = \frac{.0002}{.0010} = \frac{2}{10}$$

$$\therefore \text{य} = 12$$

$$\therefore \frac{\text{ख} - \text{ग}}{2} = 3^{\circ} 26' 12'' \quad \dots \dots \dots (1)$$

इसके अतिरिक्त $\frac{\text{ख} + \text{ग}}{2} = 90^{\circ} - \frac{\text{क}}{2}$

$$= 90^{\circ} - 41^{\circ} 12'$$

$$= 48^{\circ} 42' \quad \dots \dots \dots (2)$$

(1) और (2) क योग और वियोग से,

$$\text{ख} = 46^{\circ} 12' 12''$$

$$\text{और ग} = 31^{\circ} 4' 42''$$

प्रश्नावलि २१

△ काजग में,

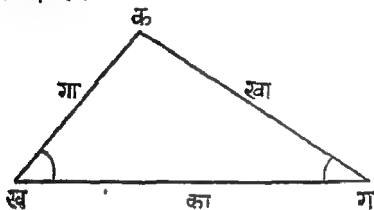
(१) का = २४२, खा = १६४, $\angle \text{ग} = 48^{\circ}$ तो त्रिभुज का निर्धारण करो। [नागपुर १९४६]

(२) का = ३, खा = १, $\angle \text{ग} = 43^{\circ} 3' 42''$ तो क और ख कोणों का निश्चय करो। [नागपुर १९४१]

(३) यदि गा = २१०, का = ११०, $\angle \text{ख} = 38^{\circ} 42' 30''$ तो ग और क कोणों का निश्चय करो। [नागपुर १९३२]

- (४) यदि का और खा भुजाएं १४:११ निम्पत्ति में हों और $\frac{\text{स्प} \frac{ग}{२}}{२} = \frac{१६}{१५}$ तो क और ख कोणों का निश्चय करो ।
- (५) यदि खा = २गा और $\angle क = ६०^\circ$ तो ख और ग तथा का और खा की निम्पत्तियां निकालो ।
- (६) यदि का = ३०, खा = २० और बीच का कोण गा = २२° तो शेष कोणों का निश्चय करो । [यनारस १९३९]
- (७) किसी त्रिभुज कखग में खा = २७, गा = २३, $\angle क = ४४^\circ ३०'$ तो ख और ग कोणों का निश्चय करो । [यनारस १९४१]
- (८) यदि खा = १३१, गा = ७२, $\angle क = ४०^\circ$ तो ख और ग कोण निकालो । [इलाहाबाद १९३८]
- (९) यदि खा और गा भुजाएं ७:३ निम्पत्ति में हों और बीच का कोण क = ६०° हो, तो कोण ख और ग निकालो । [इलाहाबाद १९४०]
- (१०) त्रिभुज कखग का निर्धारण करो, जिसमें,
 खा = $\sqrt{६}$, गा = $३ - \sqrt{३}$ और $\angle क = ७५^\circ$
 (सूत्र $\text{का}^2 = \text{खा}^2 + \text{गा}^2 - २ \text{खा} \cdot \text{गा} \cdot \cos \text{का}$ का प्रयोग करो)

१४.६ दशा ३— जब त्रिभुज की एक भुजा और दो कोण दिए हों।



आ० १४.६

मान लो दत्त भुजा और कोण क्रमशः का, ख और ग हैं।

क्योंकि कोण ख और ग ज्ञात हैं, अतः कोण क, समीकार $\text{क} = 180^\circ - \text{ख} - \text{ग}$ से ज्ञात किया जा सकता है।

भुजा खा, समीकार खा = $\frac{\text{का} \cdot \text{ज्या ख}}{\text{ज्या क}}$ से निश्चित की जा सकती है।

दोनों पक्षों की छेदा लेने से इस समीकार का निम्नलिखित रूपान्तरण हो जाता है—

$$\text{छे खा} = \text{छे का} + \text{छे ज्या ख} - \text{छे ज्या क}$$

इसी प्रकार भुजा गा का निश्चय करने के लिए संवध

$$\text{गा} = \frac{\text{का} \cdot \text{ज्या ग}}{\text{ज्या क}} \text{ है।}$$

अथवा छे गा = छे का + छे ज्या ग - छे ज्या क है।

१४.६। उदाहरण— \triangle फसग में, का = ४२.७, ख = ३०°, ग = ७०°३५', तो त्रिभुज की लघुतम भुजा निकालो।

$$\begin{aligned}\angle \text{फा} &= 180^\circ - \text{ख} - \text{ग} \\ &= 180^\circ - 30^\circ - 70^\circ 35' \\ &= 79^\circ 25'\end{aligned}$$

लघुतम कोण ख के सम्मुख की भुजा ही लघुतम होगी।

$$\text{अग खा} = \frac{\text{फा ज्या ख}}{\text{ज्या क}}$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{खा} &= \frac{42.7 \text{ ज्या } 30^\circ}{\text{ज्या } 79^\circ 25'} \\ &= \frac{42.7}{2 \text{ ज्या } 79^\circ 25'}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{छे खा} &= \text{छे } 42.7 - \text{छे } 2 - \text{छे ज्या } 79^\circ 25' \\ &= 2.6968 - .2010 - 1.2924, \\ &= 2.4029 \quad \text{सारणी से} \\ &= \text{छे } 242.2 \quad \text{प्रतिच्छेदा सारणी से}\end{aligned}$$

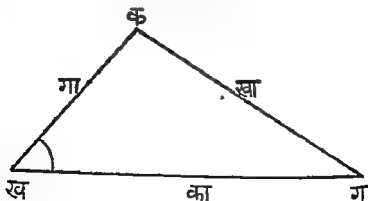
$$\therefore \text{लघुतम भुजा} = 242.2$$

प्रश्नावलि २२

Δ कखग में,

- (१) का = $\sqrt{13}$, ख = 40° , ग = 60° , तो खा, गा निकालो।
- (२) का = २६२, क = $45^\circ 13'$ और ख = $99^\circ 27'$, तो ग, खा और गा का निश्चय करो। [नागपुर १९४३]
- (३) ख = 45° , ग = 10° और गा = २०० पाद, तो खा निकालो। [पटना १९४०]
- (४) का = ३९, क = $61^\circ 34'$, ख = $27^\circ 44'$, तो त्रिभुज का निर्धारण करो। [कलकत्ता १९३३]
- (५) का = १९, क = $42^\circ २८'$ और ग = $93^\circ ४०'$, तो खा निकालो। [पटना १९३६]

१४७ दशा ४.—जब त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनमें से एक के सम्मुख का कोण दिया है।



आ. १४७

मान लो भुजाएं खा और गा तथा खा के सम्मुख का कोण ख दिया हुआ है।

$$\text{संबंध, ज्या ग} = \frac{\text{गा} \cdot \text{ज्या ख}}{\text{खा}} \dots\dots\dots (१)$$

से छेदा लेकर कोण ग निश्चय किया जा सकता है।

इसके पश्चात् संबंध क = $180^\circ - \text{ख} - \text{ग}$ से कोण क प्राप्त होता है।

$$\frac{\text{का}}{\text{ज्या क}} = \frac{\text{खा}}{\text{ज्या ख}}$$

$$\text{संबंध का} = \frac{\text{खा} \cdot \text{ज्या क}}{\text{ज्या ख}} \dots\dots\dots (२)$$

से शेष भुजा 'का' निकाली जा सकती है।

१४.७१ पिछले अनुच्छेद में, समीकार (१) से, ऊपर दिए हुए अवयवों की महत्ता के अनुसार, ग की कभी कोई भी अर्हा नहीं मिलती, कभी केवल एक और कभी दो।

इन भिन्न २ दशाओं पर यहाँ विचार किया जायगा। प्रथम, मान लो कि दत्त कोण ख न्यून है।

(अ) यदि खा < $\frac{\text{गा} \cdot \text{ज्या ख}}{\text{खा}}$ हो, तो $\frac{\text{गा} \cdot \text{ज्या ख}}{\text{खा}} > १$, अर्थात् ज्या ग > १। अतः कोण ग की कोई भी अर्हा सम्भव

नहीं है और दत्त अवयवों से कोई त्रिभुज नहीं बन सकता।

(ग) यदि $\text{खा} = \text{गा. ज्या ख}$, तो $\frac{\text{गा. ज्या ख}}{\text{खा}} = 1$

अर्थात् ज्या ग = १, अतः $\angle \text{ग} = 90^\circ$ । इसलिए कोण ग की केवल एक ही अर्धा (अर्थात् 90°) प्राप्त होती है और त्रिभुज लंबवर्ती त्रिभुज है।

(द) यदि $\text{खा} > \text{गा ज्या ख}$, तो $\frac{\text{गा ज्या ख}}{\text{खा}} < 1$,

अर्थात् ज्या ग < 1 । इसलिए कोण ग की दो अर्धाएँ हैं जिनमें से एक न्यूनकोण और दूसरी अधिककोण है और वे परस्पर ऋजुपूरक हैं।

परन्तु ये दो अर्धाएँ सदा ग्राह्य (admissible) नहीं होतीं। नीचे (इ) की उपदशाओं पर विचार किया गया है।

(इ_१) यदि $\text{खा} > \text{गा}$ तो $\text{ख} > \text{ग}$

परन्तु दत्त कोण ख न्यून है; अतः कोण ग भी न्यून होना चाहिए। इस कारण ग की अधिककोण वाली अर्धा ग्राह्य नहीं है। इसलिए ग की केवल एक ही अर्धा है।

(इ_२) यदि $\text{खा} = \text{गा}$, तो $\text{ख} = \text{ग}$, इसलिए इस दशा में भी ग की केवल न्यूनकोण वाली अर्धा ही ग्राह्य है।

(इ₃) यदि खा < गा तो ख < ग

इस दशा में ग की दोनों अर्हाएं ग्राह्य हैं। इसलिए क की भी दो संचादी अर्हाएं होंगी और संबंध (२) से का की भी दो अर्हाएं प्राप्त होती है।

इस दशा में दत्त प्रतिबंधों का समाधान करने वाले दो त्रिभुज होते हैं।

अथ मान लो दत्त कोण ख अधिक कोण है।

(अ') यदि खा < गा, तो ख < ग, अतः ग भी अधिक कोण है। अतः इस दशा में कोई त्रिभुज संभव नहीं है।

(आ') यदि खा = गा, तो ख = ग; इसलिए ग भी अधिक कोण है। अतः, इस दशा में भी कोई त्रिभुज संभव नहीं है।

(इ') यदि खा > गा, तो ख > ग। इसलिए समीकार (१) से प्राप्त की हुई ग की केवल न्यून अर्हा ही ग्राह्य है।

अतः केवल एक ही त्रिभुज संभव है।

अथ उपलब्ध फलों को संक्षेप में संकलित किया जाता है—

(१) यदि खा < गा. ज्या ख, तो एक भी त्रिभुज संभव नहीं है।

(२) यदि खा = गा. ज्या ख, तो एक लंबकोण त्रिभुज बनता है।

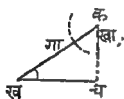
(३) यदि खा > गा. ज्या ख और < गा तथा कोण ख न्यून हो, तो दो त्रिभुज संभव हैं।

(४) यदि खा > गा अथवा = गा अर्थात् आवश्यक रूप से खा > गा ज्या ख और ख न्यूनकोण हो, तो एक ही त्रिभुज संभव है जिसमें कोण ग न्यून होगा।

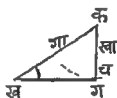
(५) यदि ख अधिक कोण है, तो ऐसी दशा को छोड़कर जिसमें $\text{खा} > \text{गा}$, अन्य दशाओं में कोई त्रिभुज नहीं बनाया जा सकता।

क्योंकि खा, गा और ख की कुछ विशेष अर्थाओं के लिये त्रिभुज को निश्चित करने में संदेह उत्पन्न होता है, अतः इस प्रकार की दशा को त्रिभुज के निर्धारण की संदिग्ध दशा (ambiguous case of solution of triangles) कहते हैं।

१४७२ शैलिक य विधि से संदिग्ध दशा पर विचार—



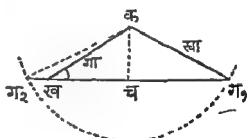
आकृति १



आकृति २



आकृति ३



आकृति ४

भा. १४८

खा, गा और ख अवयवों की सहायता से त्रिभुज को खींचने का प्रयत्न करो। कख = गा लेकर $<$ कखच = दत्त कोण ख बनाओ। तीसरा शीर्ष ग, खच रेखा पर क बिंदु से खा दूरी पर होगा। इसलिए क को केंद्र मानकर खा त्रिज्या का एक वृत्त चाप खींचो।

खच पर लंब कच खींचो; तो कच = गा ज्या ख
इस प्रकार ये दशार्थ उत्पन्न होते हैं—

(१) यदि खा $<$ गा ज्या ख अर्थात् $<$ कच, तो वृत्त चाप, रेखा खच को नहीं काटेगा और रचना असफल होगी इस दशा में कोई भी त्रिभुज संभव नहीं है। (आकृति १)

(२) यदि खा = गा ज्या ख, अर्थात् = कच तो वृत्त-चाप, खच रेखा का च बिंदु पर स्पर्श करता है। अतः त्रिभुज कखच अथवा कखग प्राप्त होता है जिसमें ग बिंदु पर का कोण लम्बकोण है। (आकृति २)

(३) यदि खा $>$ गा ज्या ख, अर्थात् $>$ कच, परन्तु $<$ गा तो वृत्त चाप, रेखा खच का ग, और ग, दो बिन्दुओं पर छेदन करता है। ये ख के एक ही पार्श्व में होते हैं। इस दशा में, दत्त अवयवों से, दो त्रिभुज कखग_१, कखग_२ बनते हैं। (आकृति ३)

(४) यदि खा $>$ गा और इसलिए आवश्यक रूप से खा $>$ गा ज्या ख, अर्थात् $>$ कच तो वृत्तचाप, रेखा खच का ग, और ग, दो बिन्दुओं पर छेदन करता है। ये ख के विरुद्ध पार्श्वों में होते हैं। परन्तु इस दशा में, दत्त अवयवों से,

केवल एक ही त्रिभुज कखग, बनता है; क्योंकि दूसरे त्रिभुज कखग, में ख पर का कोण $(180^\circ - \text{ख})$ के सम है और इसलिए यह त्रिभुज दत्त प्रतिबंधो का समाधान नहीं करता।

यदि गा = गा, तो बिंदु ख और ग, संपाती होते हैं, और केवल एक ही त्रिभुज प्राप्त होता है। (आकृति ४)

यदि ख अधिककोण हो, तो इसके लिए उपयुक्त आकृतियाँ बनाने से यह स्पष्ट हो जायगा कि जब $\text{खा} < \text{गा}$ अथवा $\text{खा} = \text{गा}$, तो कोई भी त्रिभुज नहीं बनता, और जब $\text{खा} > \text{गा}$, तो केवल एक ही त्रिभुज बनता है।

१४.७३ बीजीय विधि से संबंधित दशा पर विचार—
अनुच्छेद १४.७ की आकृति से,

$$\text{खा}^2 = \text{गा}^2 + \text{का}^2 - २ \text{ गा. का. कोज्या ख}$$

यदि खा, गा और ख दिए हों तो 'का' निश्चित करना।

ऊपर दिया हुआ संबंध 'का' में वर्गसमीकार है जो इस रूप में लिखा जा सकता है:—

$$\text{का}^2 - २ \text{ गा. कोज्या ख. का} + (\text{गा}^2 - \text{खा}^2) = 0$$

$$\therefore \text{का} =$$

$$\frac{२ \text{ गा. कोज्या ख} \pm \sqrt{४ \text{ गा.}^2 \text{ कोज्या}^2 \text{ ख} - ४ (\text{गा}^2 - \text{खा}^2)}}{२}$$

$$\text{अथवा का} = \text{गा. कोज्या ख} \pm \sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा. कोज्या}^2 \text{ ख}} \dots\dots\dots (अ)$$

(१) यदि $खा < गा.ज्या ख$, तो

✓ $खा^2 - गा^2 ज्या^2 ख$ एक काल्पनिक (imaginary) राशि है; और (अ) से 'का' की एक भी वास्तविक अर्हा प्राप्त नहीं होती। इसलिए इस दशा में एक भी त्रिभुज संभव नहीं है।

(२) यदि $खा = गा.ज्या ख$, तो समीकार के दोनों मूल वास्तविक और समान हो जाते हैं; और $का = गा कोज्या ख$ हो जाता है। अतः इस दशा में केवल एक ही त्रिभुज प्राप्त होता है जो लवकोण त्रिभुज होता है।

(३) यदि $खा > गा.ज्या ख$, तो का की दो वास्तविक और भिन्न अर्हाएं मिलती हैं। परन्तु ये अर्हाएं उसी दशा में ग्राह्य हो सकती हैं जब वे दोनों धन चिह्न युक्त हों क्योंकि 'का' आवश्यक रूप से धन होता है।

का की दो अर्हाओं में से

$गा कोज्या ख + \sqrt{खा^2 - गा^2 ज्या^2 ख}$ ही धन है;
और दूसरी अर्हा $गा कोज्या ख - \sqrt{खा^2 - गा^2 ज्या^2 ख}$
तभी धन होगी,

जब $\sqrt{खा^2 - गा^2 ज्या^2 ख} < गा कोज्या ख$

जब $खा^2 - गा^2 ज्या^2 ख < गा^2 कोज्या^2 ख$

जब $खा^2 < गा^2 (कोज्या^2 ख + ज्या^2 ख)$

जब $खा^2 < गा^2$

जब $खा < गा$

अतः यदि $\text{खा} > \text{गा.ज्या ए और } < \text{गा हो, तो दो त्रिभुज संभव हैं।}$

(४) यदि $\text{खा} > \text{गा}$ तो का की एक अर्धा

गा कोज्या ख - $\sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2}$ ज्या^२ ख, ऋण हो जाती है और इसका संवादी त्रिभुज नहीं बनता। अतः, का की धन अर्धा का संवादी केवल एक ही त्रिभुज बनता है।

यदि $\text{खा} = \text{गा}$, तो का की एक अर्धा शून्यसम हो जाती है और इस अर्धा का संवादी त्रिभुज नहीं बनता। अतः का की दूसरी अर्धा अर्थात् २ गा.कोज्याख का संवादी केवल एक ही त्रिभुज बनता है।

(५) यदि ख अधिक कोण हो तो गा कोज्या ए ऋण होता है। अतः गा की एक अर्धा गा.कोज्या ए - $\sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2}$ ज्या^२ ख सदा ऋण रहती है और इसका संवादी त्रिभुज असंभव है।

दूसरी अर्धा तभी धन होगी,

जब $\text{गा कोज्या ख} + \sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2}$ ज्या^२ ख > 0

जब $\sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2}$ ज्या^२ ख $> -\text{गा कोज्या ख}$

जब $\text{खा}^2 > \text{गा}^2$ कोज्या^२ ख + गा^2 ज्या^२ ख

जब $\text{खा} > \text{गा}$

इसलिए यदि ख अधिककोण हो और खा < गा अथवा खा = गा, तो एक भी त्रिभुज नहीं बन सकता और यदि खा > गा, तो केवल एक त्रिभुज बन सकता है।

१४७५ उदाहरण १— \triangle कखग में, खा = ४१, गा = ६० और ख = $२८^{\circ}३०'$ तो सिद्ध करो कि यह त्रिभुज के निर्धारण की संदिग्ध दशा है। त्रिभुज क शेष कोण निकालो।

दत्त कोण ख न्यून है; इसलिए यह दशा संदिग्ध तभी होगी,

जब खा > गा ज्या ख और < गा

जब ४१ > ६० ज्या $२८^{\circ}३०'$ और < ६०

सारणी सं, ज्या $२८^{\circ}३०' = ४७७२$

यदि ४१ > ६०×४७७२ और < ६० तो दशा संदिग्ध रहेगी।

क्योंकि, ४१ > २८६३२ और < ६० सत्य है,

अतः यह संदिग्ध दशा है।

$$\text{ज्या ग} = \frac{\text{गा.ज्या ख}}{\text{खा}} = \frac{६० \times \text{ज्या } २८^{\circ}३०'}{४१}$$

$$\therefore \text{छे ज्या ग} = \text{छे } ६० + \text{छे ज्या } २८^{\circ}३०' - \text{छे } ४१$$

$$= १७७८२ + १६७८७ - १६१२८$$

$$= १८१४१$$

$$= \text{छे ज्या } ४४^{\circ}१८'$$

$$\angle \text{ग} = ४४^{\circ}१८' \text{ अथवा } \angle \text{ग} = १८०^{\circ} - ४४^{\circ}१८'$$

$$= १३५^{\circ}४२'$$

इसलिए अनुच्छेद १४.७२ की आकृति से,

$$\angle ग_1 = ४४^{\circ} १८', \angle ग_2 = १३५^{\circ} ४२'$$

ग की इन दो अर्धांशों की संवादी क की भी दो, अर्धांश रहेंगी।

$$क_1 = \angle खकग_1 = १८०^{\circ} - २८^{\circ} ३०' - ४४^{\circ} १८' = १०७^{\circ} १२'$$

और

$$क_2 = \angle खकग_2 = १८०^{\circ} - २८^{\circ} ३०' - १३५^{\circ} ४२' = १५^{\circ} ४८'$$

उदाहरण २— यदि खा, गा, ख दिए हों और संदिग्ध दशा में तीसरी भुजा “का” की अर्धांशक्रमशः का_१ और का_२ हों तो लिख करो कि

$$(१) का_1 + का_2 = २गा.कोज्या ख$$

$$(२) कोज्या \frac{का_1 - का_2}{२} = \frac{गा}{खा} ज्या ख$$

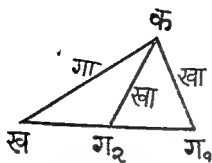
[इलाहाबाद १९४१]

$$\text{सूत्र, कोज्या ख} = \frac{गा^2 + का^2 - खा^2}{२गा.का} \text{ से}$$

$$का^2 - २गा.कोज्या ख.का + (गा^2 - खा^2) = ०$$

इस समीकार के मूल का_१ और का_२ हैं इसलिए वर्ग समीकार के लिखान्तानुसार,

$$का_1 + का_2 = २गा.कोज्या ख \quad \dots\dots\dots(१)$$



अथ,

$$क_1 + ख + ग_1 = 180^\circ$$

और

$$क_2 + ख + ग_2 = 180^\circ$$

आ. १४०९

∴ योग से, $(क_1 + क_2) + 2ख + (ग_1 + ग_2) = 360^\circ$
परन्तु $ग_1, ग_2$ क्रजुपूरक कोण हैं;

$$\text{अतः } ग_1 + ग_2 = 180^\circ$$

$$\therefore क_1 + क_2 = 180^\circ - 2ख$$

$$\text{अथवा, } \frac{क_1 + क_2}{2} = 90^\circ - ख \quad \dots\dots(अ)$$

$$\Delta कखग_1 \text{ से, } \frac{खा}{ज्या ख} = \frac{का_1}{ज्या क_1}$$

$$\Delta कखग_2 \text{ से, } \frac{खा}{ज्या ख} = \frac{का_2}{ज्या क_2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{खा}{ज्या ख} &= \frac{का_1}{ज्या क_1} = \frac{का_2}{ज्या क_2} = \frac{का_1 + का_2}{ज्या क_1 + ज्या क_2} \\ &= \frac{2 गा.कोज्या ख}{2 ज्या \frac{क_1 + क_2}{2} कोज्या \frac{क_1 - क_2}{2}} \end{aligned}$$

संबंध (१) से

$$= \frac{\text{गा.कोज्या ख}}{\text{ज्या } (90^\circ - \text{ख}) \text{ कोज्या } \frac{\text{क}_1 - \text{क}_2}{2}}$$

संघ (अ) से

$$= \frac{\text{गा.कोज्या ख}}{\text{कोज्या ख.कोज्या } \frac{\text{क}_1 - \text{क}_2}{2}}$$

$$= \frac{\text{गा}}{\text{कोज्या } \frac{\text{क}_1 - \text{क}_2}{2}}$$

$$\therefore \text{कोज्या } \frac{\text{क}_1 - \text{क}_2}{2} = \frac{\text{गा.ज्या ख}}{\text{खा}}$$

उदाहरण—रैखिकीय विधिसे सिद्ध करो कि

$$\text{कोज्या } \frac{\text{क}_1 - \text{क}_2}{2} = \frac{\text{गा.ज्या ख}}{\text{खा}}$$

प्रश्नावलि २३

(१) यदि

(१) खा = २५, गा = १६, ख = 114.6°

(२) खा = २२, गा = ३३, ख = 30.82°

(३) खा = ७, गा = ७, ख = 120°

(४) खा = $8\sqrt{2}$, गा = ८, ख = 84°

तो किस दशा में

(अ) एक भी त्रिभुज न बनेगा ?

(आ) एक ही त्रिभुज बनेगा ?

(इ) दो त्रिभुज बनेंगे ?

संभाव्य त्रिभुजों का निर्धारण भी करो।

- (२) यदि $ग = ४७.२३$, $का = ५६.५५$ और $ग = ४८^{\circ}३०'$ तो सिद्ध करो कि त्रिभुज कखग का निर्धारण संदिग्ध है। सारणी की सहायता से उसका निर्धारण करो।

[नागपुर १९४२]

- (३) निम्नलिखित दशाओं में से कारण देते हुए संदिग्ध दशाएं निकालो और सारणी की सहायता से उनका निर्धारण करो।

(१) $क = ३०^{\circ}$, $ग = २५०$ पाद, $का = १२५$ पाद

(२) $क = ३०^{\circ}$, $ग = २५०$ पाद, $का = २००$ पाद

[पटना १९४२]

- (४) एक त्रिभुज में एक कोण $११२^{\circ}३'$ है। उसके सम्मुख की भुजा ५७३ पाद है और एक दूसरी भुजा ३२४ पाद है, तो अन्य दो कोणों का निश्चय करो।

[इलाहाबाद १९३९]

- (५) यदि $का = २$, $खा = \sqrt{३} + १$, $क = ४५^{\circ}$ तो \triangle कखग का निर्धारण करो।

[मैसूर १९४३]

(६) यदि $का = ३६०$, $खा = २८५$, $क = ३४^\circ$, तो \triangle कलम का निर्धारण करो।
[वाचनकोर १९४३]

(७) सिद्ध करो कि जब $खा$, $गा$ और $ख$ दिए हों और त्रिभुज का निर्धारण संदिग्ध हो तो $का$ की दो अर्धों का अन्तर $२\sqrt{खा^2 - गा^2 \cos^2 ख}$ है।

(८) यदि $खा$, $गा$ और $ख$ दिए हों और संदिग्ध दशा में तीसरी भुजा का की अर्धों का, $का$, हों और $का > का$ हो, तो सिद्ध करो कि

(१) $का - का = २ खा \cdot कोज्या ग$ [घनारस १९२८]

(२) $(का - का)^2 + (का + का)^2 \sin^2 ख = ४खा^2$

(३) $का^2 + का^2 - २ का का कोज्या ख$
 $= ४खा^2 कोज्या^2 ख$
 [घनारस १९३५]

१४८ अब उस दशा पर विचार किया जायगा जिसमें त्रिभुज के तीनों कोण दिए गए हों। इसका उल्लेख अनुच्छेद १४३ में किया गया है।

इस दशा में, सूत्र $\frac{का}{ज्या क} = \frac{खा}{ज्या ख} = \frac{गा}{ज्या ग}$ के अनुसार

तीनों भुजाओं का परस्पर अनुपात निश्चित किया जा सकता है। परन्तु इससे उनकी वास्तविक लंबाइयां ज्ञात नहीं हो सकती और त्रिभुज का निर्धारण नहीं हो सकता। इस दशा

में दिए कोणों वाले असंख्य त्रिभुज बन सकते हैं और वे सब परस्पर समरूप (similar) होंगे।

१४.९ दूसरे न्यासों (data) से त्रिभुजों का निर्धारण—
त्रिभुज की भुजाओं और उनके कोणों के स्थान में यदि अन्य न्यास दिए हों, तो भी त्रिभुज का निर्धारण हो सकता है। इन उदाहरणों में इसकी रीति दर्शाई गई है।

उदाहरण १— यदि गा, का + खा और ग दिए हों तो त्रिभुज का निर्धारण करो।

$$\frac{\text{का} + \text{खा}}{\text{गा}} = \frac{\text{ज्या क} + \text{ज्या ख}}{\text{ज्या ग}}$$

$$= \frac{2\text{ज्या } \frac{\text{क} + \text{ख}}{2} \text{कोज्या } \frac{\text{क} - \text{ख}}{2}}{\text{ज्या ग}}$$

$$= \frac{2\text{कोज्या } \frac{\text{ग}}{2} \text{कोज्या } \frac{\text{क} - \text{ख}}{2}}{2\text{ज्या } \frac{\text{ग}}{2} \text{कोज्या } \frac{\text{ग}}{2}}$$

$$\therefore = \frac{\text{कोज्या } \frac{\text{क} - \text{ख}}{2}}{\text{ज्या } \frac{\text{ग}}{2}}$$

प्रश्नावलि २४

- (१) एक त्रिभुज के कोण समान्तर श्रेढी में हैं और लघुतम कोण 30° का है। दिखाओ कि त्रिभुज की महत्तम भुजा लघुतम भुजा की दुगुनी है।
- (२) किसी त्रिभुज के कोण $1:4:6$ के अनुपात में हैं। तो सिद्ध करो कि उसकी भुजाएं $\sqrt{3}-1: \sqrt{3}+1: 2\sqrt{2}$ के अनुपात में होंगी।
- (३) यदि \triangle कखग में,

$$\text{कोज्या क} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ और कोज्या ग} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$
तो का, खा, गा का अनुपात निकालो।
- (४) किसी त्रिभुज के कोण समान्तर श्रेढी में हैं और उसकी लघुतम और महत्तम भुजाओं की लम्बाइयां क्रमशः १६ और २४ हैं तो त्रिभुज का निर्धारण करो।
[पटना १९३९]
- (५) किसी त्रिभुज की दो भुजाएं ६५ और २५ हैं और उनके सम्मुख के कोणों का अन्तर 60° का है। तो उसके सव कोण निकालो।
[इलाहाबाद १९४२]
- (६) यदि \triangle कखग में
 $(का + खा + गा) (खा + गा - का) = खा.गा$ तो क निकालो।

$$\therefore \text{कोज्या} \frac{क-ख}{२} = \frac{का+खा}{गा} \text{ज्या} \frac{ग}{२}$$

इस संबंध से $\frac{क-ख}{२}$ ज्ञात हो जाता है।

और $\frac{क+ख}{२}$ संबंध $\frac{क+ख}{२} = ९०^\circ - \frac{ग}{२}$ से ज्ञात हो जाता है।

इसलिए कोण क और ख निकाले जा सकते हैं।

कोण क और ख तथा भुजा गा के ज्ञात होने के कारण अय निर्मेय का साधन तीसरी दशा के समान हो सकता है।

उदाहरण २— यदि किसी त्रिभुज के शीर्षों से सम्मुख की भुजाओं पर खींचे गए लंबों की लम्बाइयां दी हों तो त्रिभुज का निर्धारण करो।

मान लो शीर्ष क, ख, ग से सम्मुख की भुजाओं पर खींचे गए लंबों की लम्बाइयां क्रमशः $ल_१, ल_२, ल_३$ हैं।

$$\text{तो, } का \cdot ल_१ = खा \cdot ल_२ = गा \cdot ल_३ = २\Delta$$

$$\therefore \frac{का}{ल_१} = \frac{खा}{ल_२} = \frac{गा}{ल_३}$$

तीनों भुजाओं का अनुपात ज्ञात होने पर इस निर्मेय का साधन दशा १ के समान हो सकता है।

प्रश्नावलि २४

(१) एक त्रिभुज के कोण समान्तर श्रेढी में हैं और लघुतम कोण 30° का है। दिखाओ कि त्रिभुज की महत्तम भुजा लघुतम भुजा की दुगुनी है।

(२) किसी त्रिभुज के कोण $1:4:6$ के अनुपात में हैं। तो सिद्ध करो कि उसकी भुजाएं $\sqrt{3}-1: \sqrt{3}+1: 2\sqrt{2}$ के अनुपात में होंगी।

(३) यदि \triangle कखग में,

$$\text{कोज्या क} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ और कोज्या ग} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

तो का, खा, गा का अनुपात निकालो।

(४) किसी त्रिभुज के कोण समान्तर श्रेढी में हैं और उसकी लघुतम और महत्तम भुजाओं की लम्बाइयां क्रमशः १६ और २४ हैं तो त्रिभुज का निर्धारण करो।
[पटना १९३९]

(५) किसी त्रिभुज की दो भुजाएं ६५ और २५ हैं और उनके सम्मुख के कोणों का अन्तर 60° का है। तो उसके सब कोण निकालो।

[इलाहाबाद १९४२]

(६) यदि \triangle कखग में

$$(का + खा + गा) (खा + गा - का) = खा.गा \text{ तो क निकालो।}$$

(७) यदि $g = 60^\circ$, $का - खा = 1$ और $का \cdot खा = 20$
तो त्रिभुज का निर्धारण करो।

(८) यदि $का = 32$ पाद, $खा + गा = 106$ पाद और
 $\angle ग = 132^\circ 38'$, तो त्रिभुज का निर्धारण करो।

[नागपुर १९४४]

[उद्देशक (hint)— इस सूत्र का प्रयोग करो

$$(का - खा + गा) \operatorname{स्प} \frac{ख}{2} = (का + खा - गा) \operatorname{स्प} \frac{ग}{2}$$

(९) यदि $का = 49$ पाद, $गा - खा = 19$ पाद और
 $\angle ख = 49^\circ$, तो कोण क और भुजा खा निकालो।

[नागपुर १९४०]

[उद्देशक— इस सूत्र का प्रयोग करो

$$(का - खा + गा) \operatorname{स्प} \frac{ख}{2} = (का + खा - गा) \operatorname{स्प} \frac{ग}{2}$$

(१०) उस त्रिभुज की भुजाएं 'निश्चित' करो जिसमें
 $क = 62^\circ$, $क = 43^\circ$ और जिसका क्षेत्रफल $= 480$ वर्ग
एकक।

[नागपुर १९४५]

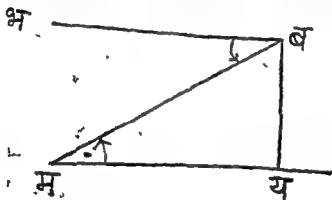
[उद्देशक— इस सूत्र का प्रयोग करो

$$\Delta = \frac{1}{2} का \cdot ज्याख \cdot ज्याग \cdot व्युज्या क]$$

पन्द्रहवां अध्याय ऊँचाईयां और दूरियां

(heights and distances)

१५.१ परिभाषा— मान लो म और व दो बिन्दु हैं और व बिन्दु म बिन्दु से उच्चतर समतल (level) पर है। और



आ. १५.१

म बिन्दु से खींची हुई क्षैतिज (horizontal) रेखा व बिन्दु से खींची गई उदग्र (vertical) रेखा का व बिन्दु पर छेदन करती है।

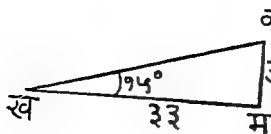
यम रेखा के समांतर यम खींचो। म बिंदु से य बिंदु की ओर देखने से यम रेखा मय क्षैतिज रेखा से जो कोण यमव बनाती है, उसे म बिंदु पर य बिंदु का उन्नतिकोण (angle of elevation) कहते हैं, और य बिंदु से म बिंदु की ओर देखने से यम रेखा, यम क्षैतिज रेखा से जो कोण भवम बनाती है, उसे य बिंदु पर म बिंदु का अवनतिकोण (angle of depression) कहते हैं।

१५२ यदि सम्प्रन्धित अवनति कोण, उन्नति कोण और अन्य आवश्यक कोण तथा दूरियां ज्ञात हों तो त्रिषु गण बिन्दु और अन्य बिन्दुओं के बीच की ऊंचाईयां और दूरियां या किसी प्रस्थाणु (tower) अथवा स्तूप (pyramid) आदि की ऊंचाईयां त्रिकोणमिति से निश्चित की जा सकती हैं।

उन्नति कोण, अवनति कोण और इस प्रकार के अन्य आवश्यक कोणों का मापन करने के लिए षष्ठक (sextant) और त्रिकोणमान (theodolite) यंत्रों का उपयोग किया जाता है।

१५३ अब ऊंचाई और दूरी से सम्बद्ध कुछ निर्मयों (problems) का साधन किया जायगा।

उदाहरण १—क्षैतिज समतल पर स्थित किसी स्तम्भ के आधार से ३३ यष्टि दूर समतल के एक बिन्दु पर स्तम्भ के शिखर का उन्नतिकोण १५° है। तो स्तम्भ की ऊंचाई का निश्चय करो।



क मान लो स्तम्भ
मक की ऊंचाई उ
यष्टि है। और
समतल पर ख से
३३ यष्टि दूर दत्त
विन्दु है। क, ख
को मिलाओ।

आ १५.२
तो \triangle मकख में,

$$\angle मखक = 15^\circ$$

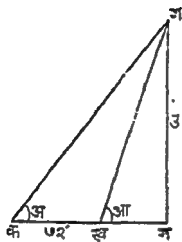
$$\text{और } \frac{\text{मक}}{\text{मख}} = \text{स्प } 15^\circ,$$

$$\text{अर्थात् } \frac{उ}{३३} = \text{स्प } 15^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{३}-१}{\sqrt{३}+१} = २ - \sqrt{३}$$

$$\therefore उ = (२ - \sqrt{३}) ३३ \text{ यष्टि.}$$

उदाहरण २— भूमि के किसी विन्दु पर किसी पहाड़ी के शिखर का उन्नति कोण कोस्प^{-१} $\frac{७}{२}$ है। यदि इस विन्दु से पहाड़ी की ओर ७२ पाद दूर नये विन्दु पर शिखर का उन्नति कोण कोस्प^{-१} $\frac{१}{३}$ है तो पहाड़ी की ऊंचाई का निश्चय करो।



आ. १५-३

और दूसरा यिन्दु ख है।

अतः कख = ७२ पाद

और $\angle गखम = आ = \cos^{-1} \frac{१}{३}$

Δ कमग से,

$$\frac{७}{२} = \cos अ = \frac{कम}{उ}$$

Δ खमग से,

$$\frac{१}{३} = \cos आ = \frac{खम}{उ}$$

मान लो म पहाड़ी
का आधार और न
उसका शिखर है
और मग = उपाद।
मान लो पहला
यिन्दु क है। अतः
 $\angle गकम = \angle अ$
 $= \cos^{-1} \frac{७}{२}$

$$\therefore \text{खम} = \frac{उ}{३}, \text{कम} = \frac{७उ}{९}$$

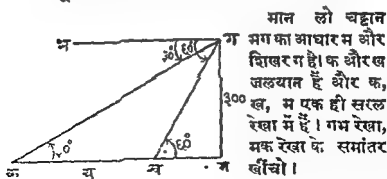
परन्तु कख = कम - खम

और कख = ७२ पाद

$$\therefore ७२ = \frac{७उ}{९} - \frac{उ}{३} = \frac{४उ}{९}$$

$$\therefore उ = १८ \times ९ \\ = १६२ \text{ पाद}$$

उदाहरण ३— समुद्रतल से ३००' उंची चट्टान पर, समुद्र पर स्थिर (at rest) दो जलयानों के अवनति कोण क्रमशः 30° और 60° हैं। यदि दोनों जलयान और चट्टान का आधार एक ही सरल रेखा में हो, तो जलयानों के बीच की दूरी का निश्चय करो।



प्रदानानुसार

$$\angle \text{भगक} = 30^\circ,$$

$$\angle \text{भगख} = 60^\circ$$

और $\text{भग} = 300 \text{ पाद}$

$$\therefore \angle \text{गकम} = 30^\circ$$

और $\angle \text{गखम} = 60^\circ$

मान लो अपेक्षित दूरी कख = य पाद
लंबकोण त्रिभुज दभग से,

$$\frac{\text{भग}}{\text{कग}} = \text{ज्या } 30^\circ$$

अथवा $\frac{300}{\text{कग}} = \frac{1}{2}$

$$\therefore \text{कग} = 600 \text{ पाद}$$

\triangle कखग से,

$$\frac{\text{कख}}{\text{ज्या कगख}} = \frac{\text{कग}}{\text{ज्या कखग}}$$

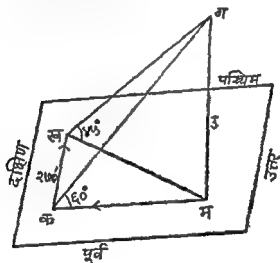
$$\therefore \frac{\text{य}}{\text{ज्या } 30^\circ} = \frac{600}{\text{ज्या}(90^\circ - 60^\circ)}$$

$$\text{अथवा य} = \frac{600 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \text{ पाद}$$

$$= \frac{600}{\sqrt{3}} \text{ पाद}$$

$$= 200\sqrt{3} \text{ पाद}$$

उदाहरण ४— किसी प्रस्थाणु के आधार के दक्षिण में स्थित किसी बिन्दु क पर, प्रस्थाणु के शीर्ष का उन्नति-कोण 60° है और क की पश्चिम दिशा में किसी बिन्दु ए पर शीर्ष का उन्नति कोण 45° है। यदि कन = २७० पाद हो तो प्रस्थाणु की ऊँचाई का निश्चय करो।



आ १५५

मान लो प्रस्थाणु मग हे और म की दक्षिण दिशा में बिन्दु क पहले अवलोकन (observation) का स्थान है।

$$\angle \text{मकग} = 60^\circ$$

विन्दु ख, जो क की पश्चिम दिशा में उससे २७० पाद दूर है, दूसरे अवलोकन का स्थान है।

$$\angle \text{मखग} = 31^\circ$$

मान लो प्रस्थाणु की ऊंचाई उ पाद है।

तो त्रिभुज मकग से,

$$\frac{\text{मग}}{\text{मक}} = \text{रूप } 60^\circ$$

$$\text{अथवा } \frac{\text{उ}}{\text{मक}} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \text{मक} = \frac{\text{मग}}{\sqrt{3}} = \frac{\text{उ}}{\sqrt{3}}$$

त्रिभुज मखग से,

$$\frac{\text{मग}}{\text{मख}} = \text{रूप } 31^\circ$$

$$\text{अथवा } \frac{\text{उ}}{\text{मख}} = 1$$

$$\therefore \text{मख} = \text{उ}$$

त्रिभुज मकख में $\angle \text{मकख} = 90^\circ$

$$\text{कख}^2 + \text{मक}^2 = \text{मख}^2$$

$$\text{अथवा } (270)^2 + \frac{\text{उ}^2}{3} = \text{उ}^2$$

$$\therefore \frac{2}{3} z^2 = (200)^2$$

$$\therefore z = 200 \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$= 134 \sqrt{6} \text{ पाद}$$

प्रश्नावलि २५

- (१) क्षैतिज समतल पर स्थित किसी ताड़ के वृक्ष के पाद से ३७ पाद दूर किसी बिन्दु पर वृक्ष के शीर्ष का उन्नति-कोण 60° है, तो वृक्ष की ऊँचाई निकालो।
- (२) एक दीप-स्तम्भ से ७ पाद दूरी पर खड़े हुए $4\frac{1}{2}$ पाद ऊँचे मनुष्य की छाया की लंबाई १७ पाद है। तो स्तम्भ की ऊँचाई का निश्चय करो।
- (३) ८० पाद ऊँचे एक स्तम्भ पर १६ पाद ऊँचा एक ध्वज है। भूमि पर स्तम्भ के आधार से ३२ पाद दूरी पर उस ध्वज के बाँस द्वारा आपातित कोण निकालो।
- (४) किसी बिन्दु पर एक पर्वत के शिखर का उन्नति-कोण 15° है। उस बिन्दु से पर्वत की ओर १ कोशक बढ़ने से नए बिन्दु पर शिखर का उन्नति-कोण 60° है। तो पर्वत की ऊँचाई निकालो।
- (५) किसी स्तम्भ के आधार पर ६० पाद ऊँचे एक दूसरे स्तम्भ का उन्नति-कोण 20° और प्रथम स्तम्भ के

शिखर पर उम दूसरे स्तम्भ के शिखर का अवनति-कोण 45° है। तो प्रथम स्तम्भ की ऊँचाई निकालो।

- (६) किसी पर्वत के पाद पर पर्वत के शिखर का उन्नति-कोण 45° है। पर्वत स्तम्भ में भूमि से 30° का कोण घनाता है। भूमि से पर्वत पर १ कोशक आगे बढ़ने से नए बिन्दु पर शिखर का उन्नति-कोण 60° हो जाता है, तो पर्वत की ऊँचाई निकालो।

[नागपुर १९४४]

- (७) एक समत्रिभुजाकार क्षेत्र के केन्द्र पर क पाद ऊँचा एक स्तम्भ है। यदि त्रिभुज की प्रत्येक भुजा से स्तम्भ के शिखर पर आपातित कोण २५ के सम हो तो सिद्ध करो कि

$$\text{क्षेत्र का क्षेत्रफल} = \frac{3\sqrt{3} \text{ क}^2 \text{ ज्या}^2 \text{ अ}}{3 - 4 \text{ ज्या}^2 \text{ अ}} \text{ वर्ग पाद।}$$

[नागपुर १९४०]

- (८) किसी झील से २०० पाद ऊँचे एक बिन्दु पर एक वायुयान का उन्नति-कोण 45° है और वायुयान के प्रतिधिय का अवनति-कोण 30° है। तो झील के तल से वायुयान की ऊँचाई निकालो।

[बनारस, १९४३]

- (९) किसी नदी के तट पर स्थित २०० पाद ऊँचे एक स्तम्भ पर ३० पाद ऊँची एक मूर्ति है। यह मूर्ति,

स्तम्भ के सम्मुख नदी के दूसरे तट पर स्थित एक बिन्दु पर उसी कोण का आपातन करती है जिसका आपातन स्तम्भ के स्थान पर खड़ा हुआ ६ पाद ऊँचा एक मनुष्य ठीक उसी बिन्दु पर करता है। तो नदी के विस्तार (breadth) का निश्चय करो।

[वनारस १९४१]

- (१०) किसी स्तम्भ की पूर्व दिशा में स्थित एक बिन्दु क पर स्तम्भ के शिखर का उन्नति-कोण α है और क से उत्तर दिशा किसी बिन्दु ग पर उसका उन्नति-कोण β है। तो दिखाओ कि स्तम्भ की ऊँचाई

$$\frac{\text{कख. ज्या } \alpha, \text{ ज्या } \beta}{\sqrt{\text{ज्या } (\alpha + \beta) \text{ ज्या } (\alpha - \beta)}} \text{ है।}$$

[वनारस १९४०]

- (११) किसी गिरजाघर के दक्षिण के एक बिन्दु पर गिरजाघर के शीर्ष का उन्नति-कोण 45° है, और उस बिन्दु की पश्चिम दिशा में एक दूसरे बिन्दु पर उसका उन्नति-कोण 30° है। यदि इन दो बिन्दुओं के बीच की दूरी y हो, तो गिरजाघर की ऊँचाई निकालो।

[पटना १९४४]

- (१२) किसी झील के तल से h ऊँचाई पर स्थित बिन्दु पर के एक चादल का उन्नति-कोण α और उसके प्रतिविम्ब

का अवनति-कोण आ है। तो दिखाओ कि शील के
 तल से यादल की ऊंचाई $\frac{\text{च ज्या (अ + आ)}}{\text{ज्या (आ - अ)}}$ है।

सोलहवां अध्याय

प्रतीप वर्तुल श्रित

(inverse circular function)

१६०१ समीकार ज्या $x = \frac{1}{2}$ का समाधान, 30° , 150° ,
... इत्यादि, कोण श्रेणी करती है। धन अथवा ऋण, लघुतम
कोण, जिसकी ज्या $\frac{1}{2}$ है प्रतीक (symbol) 'ज्या⁻¹ $\frac{1}{2}$ '
द्वारा दर्शाया जाता है।

इस प्रकार ज्या⁻¹ $\frac{1}{2} = 30^\circ$ लिख सकते हैं।

सामान्यतः यदि ज्या $x = k$, तो ज्या⁻¹ k , लघुतम
संख्यात्मक कोण दर्शाता है, जिसकी ज्या k होती है। यह
प्रतीक 'ज्या वियुत (minus) एक k ' अथवा 'ज्या प्रतीप k '
इस प्रकार पढ़ा जाता है। यह ध्यान में रखना चाहिए कि
ज्या⁻¹ k , एक कोण है और इसे (ज्या k)⁻¹ से भिन्न समझना
'चाहिए जो $\frac{1}{\text{ज्या } k}$ के सम है।

इसीप्रकार कोज्या^{-१}क, घन अथवा ऋण लघुतम काण दर्शाता है, जिसकी कोज्या क है। इसी प्रकार स्प^{-१}क, कोस्प^{-१}क, व्युत्कोज्या^{-१}क और व्युज्ज्या^{-१}क की भी परिभाषाएं की जा सकती हैं।

ज्या^{-१} क, कोज्या^{-१}क, स्प^{-१}क,..... राशियां 'प्रतीप वर्तुल श्रित' कहलाती हैं।

१६-२ यदि ज्या अ = क, तो ज्या^{-१}क = अ
(परिभाषा से)

∴ ज्या (ज्या^{-१}क) = ज्या अ = क

अर्थात्, किसी राशि की प्रतीप ज्या की ज्या लेने से पुनः वही राशि मिलती है।

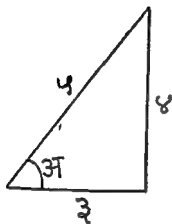
इसी प्रकार

कोज्या (कोज्या^{-१}क) = क

स्प (स्प^{-१}क) = क इत्यादि

१६-३ उदाहरण १— सिद्ध करो कि

$$\text{ज्या}^{-1} \frac{8}{9} + \text{कोज्या}^{-1} \frac{12}{13} = \text{स्प}^{-1} \frac{63}{16}$$

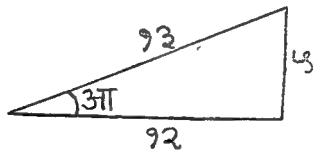


आ. १६.१

मान लो ज्या $\frac{4}{5} = अ$

$$\therefore \text{ज्या अ} = \frac{4}{5}$$

$$\text{और स्प अ} = \frac{3}{5}$$



आ. १६.२

मान लो कोज्या $\frac{92}{93} = आ$

३३१

$$\therefore \text{कोज्या आ} = \frac{12}{13}$$

$$\text{और स्प आ} = \frac{5}{13}$$

$$\text{मान लो स्प}^{-1} \frac{63}{16} = 5$$

$$\therefore \text{स्प इ} = \frac{63}{16}$$

तो अब यह सिद्ध करना है कि अ + आ = इ

अथवा, यह दिखलाना है कि

$$\text{स्प (अ + आ)} = \text{स्प इ}$$

$$\text{अब, स्प (अ + आ)} = \frac{\text{स्प अ} + \text{स्प आ}}{1 - \text{स्प अ.स्प आ}}$$

$$= \frac{\frac{8}{3} + \frac{5}{12}}{1 - \frac{8}{3} \cdot \frac{5}{12}}$$

$$= \frac{32 + 15}{36 - 20} = \frac{47}{16}$$

$$= \text{स्प इ}$$

इसलिए संबंध सिद्ध होता है।

उदाहरण २— सिद्ध करो कि

$$२ \text{ स्प}^{-1} \frac{२}{५} + \text{स्प}^{-1} \frac{२१}{२०} = \frac{\text{प्या}}{२}$$

$$\text{मान लो, } \operatorname{रूप}^{-1} \frac{2}{5} = \text{अ}$$

$$\therefore \operatorname{रूप} \text{ अ} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore \operatorname{रूप} \left(\frac{\text{प्या}}{2} - 2 \operatorname{रूप}^{-1} \frac{2}{5} \right) = \operatorname{रूप} \left(\frac{\text{प्या}}{2} - 2 \text{अ} \right)$$

$$= \text{कोरूप } 2 \text{ अ}$$

$$= \frac{1 - \operatorname{रूप}^2 \text{ अ}}{2 \operatorname{रूप} \text{ अ}}$$

$$= \frac{1 - \frac{4}{25}}{\frac{2}{5}}$$

$$= \frac{21}{20}$$

$$\therefore \frac{\text{प्या}}{2} - 2 \operatorname{रूप}^{-1} \frac{2}{5} = \operatorname{रूप}^{-1} \frac{21}{20}$$

$$\text{अथवा } -2 \operatorname{रूप}^{-1} \frac{2}{5} + \operatorname{रूप}^{-1} \frac{21}{20} = \frac{\text{प्या}}{2}$$

उदाहरण ३— सिद्ध करो कि

$$\operatorname{कोज्या}^{-1} \text{ य} - \operatorname{कोज्या}^{-1} \text{ र}$$

$$= \operatorname{कोज्या}^{-1} \left\{ \text{यर} + \sqrt{(1 - \text{य}^2)(1 - \text{र}^2)} \right\}$$

$$\text{मान लो } \operatorname{कोज्या}^{-1} \text{ य} = \text{अ}$$

$$\therefore \text{कोज्या अ} = य,$$

$$\text{ज्या अ} = \sqrt{1 - य^2}$$

$$\text{मान लो कोज्या}^{-1} र = आ$$

$$\therefore \text{कोज्या आ} = र,$$

$$\text{ज्या आ} = \sqrt{1 - र^2}$$

$$\text{तो कोज्या (अ - आ) = कोज्या अ. कोज्या आ}$$

$$+ \text{ज्या अ. ज्या आ}$$

$$= यर + \sqrt{(1 - य^2)(1 - र^2)}$$

$$\text{अध्या अ - आ} = \text{कोज्या}^{-1} \left\{ यर + \sqrt{(1 - य^2)(1 - र^2)} \right\}$$

$$\text{अ और आ की मर्हाँओं का आदेश करने पर,}$$

$$\text{कोज्या}^{-1} य - \text{कोज्या}^{-1} र$$

$$= \text{कोज्या}^{-1} \left\{ यर + \sqrt{(1 - य^2)(1 - र^2)} \right\}$$

प्रश्नावलि २६

सिद्ध करो कि

$$(१) \text{ज्या}^{-1} \frac{१}{\sqrt{५}} - \text{रूप}^{-1} \frac{१}{३} = \text{कोरूप}^{-1} ७$$

$$(२) \text{ज्या}^{-१} \frac{३}{५} - \text{कोज्या}^{-१} \frac{१२}{१३} = \text{ज्या}^{-१} \frac{१६}{६५}$$

[बनारस १९४३]

$$(३) \text{ज्या}^{-१} \frac{४}{५} + \text{ज्या}^{-१} \frac{५}{१३} + \text{ज्या}^{-१} \frac{१६}{६५} = \frac{\text{प्या}}{२}$$

[कलकत्ता १९४१]

$$(४) \text{स्प}^{-१} ४ - \text{स्प}^{-१} \frac{१}{४} = \text{स्प}^{-१} \frac{१५}{८}$$

$$(५) ४(\text{कोस्प}^{-१} ३ + \text{व्युज्या}^{-१} \sqrt{५}) = \text{प्या}$$

[कलकत्ता १९३९]

$$(६) २\text{स्प}^{-१} \frac{१}{३} + \text{स्प}^{-१} \frac{१}{७} = \frac{\text{प्या}}{४}$$

[बनारस १९४१]

$$(७) \text{ज्या}^{-१} (\text{कोज्या } y) + \text{कोज्या}^{-१} (\text{ज्या } y) = \text{प्या} - २y$$

$$(८) \text{ज्या}^{-१} y + \text{कोज्या}^{-१} y = \frac{\text{प्या}}{२}$$

[बनारस १९४५]

$$(९) \text{कोस्प}^{-१} y - \text{कोस्प}^{-१} r = \text{कोस्प}^{-१} \left(\frac{yr + १}{r - y} \right)$$

$$(१०) \text{ज्या}^{-१} y + \text{ज्या}^{-१} r$$

$$= \text{ज्या}^{-१} \left\{ y \sqrt{१ - r^2} + r \sqrt{१ - y^2} \right\}$$

$$(११) \quad २ \operatorname{स्प}^{-१} y = ज्या^{-१} \frac{२ y}{१ + y^२}$$

$$(१२) \quad \operatorname{स्प}^{-१} \sqrt{y} = \frac{१}{२} कोज्या^{-१} \left(\frac{१-y}{१+y} \right) \quad [\text{कलकत्ता १९४३}]$$

$$(१३) \quad ज्या \left\{ कोस्प^{-१} [कोज्या (\operatorname{स्प}^{-१} y)] \right\} = \sqrt{\frac{y^२ + १}{y^२ + १}} \\ [\text{बनारस १९४५}]$$

$$(१४) \quad \text{यदि } \operatorname{स्प}^{-१} y + \operatorname{स्प}^{-१} r = \frac{प्या}{२}, \text{ तो दिखाओ कि}$$

$$y, r = १$$

$$(१५) \quad (१) ज्या \left(ज्या^{-१} \frac{\sqrt{३}}{२} + कोज्या^{-१} \frac{\sqrt{३}}{२} \right)$$

$$(२) कोज्या \left(कोज्या^{-१} क + व्युत्कोज्या^{-१} \frac{१}{क} \right)$$

की अर्थापि निकालो ।

$$(१६) \quad \text{य की कौन सी अर्था, } \frac{r}{२} \\ \text{समीकार } \operatorname{स्प}^{-१} २ y + \operatorname{स्प}^{-१} ३ y = ४५^\circ \text{ का समाधान} \\ \text{करेगी ? अपने उत्तर का कारण दो ।}$$

[बनारस १९४२]

उत्तरमाला

१. (१) $४५^{\circ} २५' ५०''$ (२) $१७^{\circ} २७' ५०''$
 २. (१) $७१^{\circ} २९' ३४'' \cdot १०८$ (२) $७८^{\circ} २५' १९'' \cdot ०२$

प्रश्नावलि १

- (१) ११ पाद
 (२) ११९.०४७२४ क्षतिमान
 (३) १० और ३५
 (४) ७२° , ९०° , १०८° , १२६° , १४४° ,

$$\frac{२८५}{५}, \frac{८५}{२}, \frac{३८५}{५}, \frac{७८५}{१०}, \frac{४८५}{५}$$

- (५) (क) १०५° , ११६° , $\frac{२४८५}{३}$, $\frac{७८५}{१२}$

(ख) १००° , १११° , $\frac{१४८५}{२}$, $\frac{५८५}{९}$

$$(ग) २२\frac{१}{२}, २५, \frac{५५}{८}$$

(६) ८५९४३७ पाद

प्रश्नावलि २

$$(२१) \frac{\text{ज्या}^३ \text{अ}}{१ + \text{ज्या अ}} \quad (२२) \frac{१ + \text{व्युत्कोज्या}^३ \text{अ}}{\text{व्युत्कोज्या अ}}$$

प्रश्नावलि ३

(१) यदि ज्याअ = य, तो कोज्याअ = $\sqrt{१ - य^२}$,

$$\text{स्प अ} = \frac{य}{\sqrt{१ - य^२}}, \text{ व्युज्ज्या अ} = \frac{१}{य},$$

$$\text{व्युत्कोज्या अ} = \frac{१}{\sqrt{१ - य^२}}$$

$$\text{और कोस्प अ} = \frac{\sqrt{१ - य^२}}{य}$$

(२) यदि स्पअ = य, तो

$$\text{ज्या अ} = \frac{य}{\sqrt{१ + य^२}}, \text{ कोज्या अ} = \frac{१}{\sqrt{१ + य^२}},$$

$$\text{व्युज्ज्या अ} = \frac{\sqrt{1+y^2}}{y},$$

$$\text{व्युत्कोज्या अ} = \sqrt{1+y^2}, \quad \text{कोस्प अ} = \frac{1}{y}$$

(३) यदि व्युत्कोज्या अ = य, तो

$$\text{ज्या अ} = \frac{\sqrt{y^2-1}}{y}, \quad \text{कोज्या अ} = \frac{1}{y},$$

$$\text{स्प अ} = \sqrt{y^2-1}, \quad \text{व्युज्ज्या अ} = \frac{y}{\sqrt{y^2-1}},$$

$$\text{कोस्प अ} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$$

$$(४) \quad \text{ज्या अ} = \frac{1}{\sqrt{1+\text{कोस्प}^2 \text{ अ}}}$$

$$\text{कोज्या अ} = \frac{\text{कोस्प अ}}{\sqrt{1+\text{कोस्प}^2 \text{ अ}}}$$

$$(५) \quad \text{कोज्या अ} = \frac{\sqrt{\text{व्युज्ज्या}^2 \text{ अ} - 1}}{\text{व्युज्ज्या अ}},$$

$$\text{कोस्प अ} = \sqrt{\text{व्युज्ज्या}^2 \text{ अ} - 1}$$

$$(६) \quad \text{यदि ज्या अ} = \frac{\text{क्ष (अ + २य)}}{\text{क्ष}^2 + २\text{क्ष य} + २\text{य}^2},$$

$$\text{कोज्या अ} = \frac{२य (क्ष + य)}{क्ष^२ + २क्षय + २य^२}$$

$$\text{स्प अ} = \frac{क्ष (क्ष + २ य)}{२ य (क्ष + य)}$$

$$\text{व्युज्ज्या अ} = \frac{क्ष^२ + २ क्षय + २ य^२}{क्ष (क्ष + २ य)},$$

$$\text{व्युत्कोज्या अ} = \frac{क्ष^२ + २ क्षय + २ य^२}{२ क्ष (क्ष + य)},$$

$$\text{कोस्प अ} = \frac{२ य (क्ष + य)}{क्ष (क्ष + २ य)}$$

$$(७) \pm \left(\frac{य + १}{य - १} \right)$$

$$(८) \frac{१५}{१७}$$

प्रश्नावलि ५

प्रश्नावलि ६

- (१) (क) 30° , 150° (का) 45° , 315° (कि) 150° , 330°
 (३) १

प्रश्नावलि ७

- (१) $\text{स प्या} + (-1)\frac{\text{प्या}}{३}$ (२) $२ \text{ स प्या} \pm \frac{\text{प्या}}{२}$
 (३) $\text{स प्या} + \frac{३ \text{ प्या}}{४}$ (४) $\text{स प्या} \pm \frac{\text{प्या}}{६}$
 (५) $\text{स प्या} \pm \frac{\text{प्या}}{४}$ (६) $\text{स प्या} \pm \frac{\text{प्या}}{६}$
 (९) $२ \text{ स प्या} + \frac{\text{प्या}}{४}$ (१०) $\frac{\text{प्या}}{म-न}$

प्रश्नावलि ८

- (१) $२ \text{ स प्या} \pm \frac{\text{प्या}}{४}$ अथवा $२ \text{ स प्या} \pm \frac{२ \text{ प्या}}{३}$
 (२) $\text{स प्या} + \frac{\text{प्या}}{४}$ अथवा $\text{स प्या} + ३$, जहां कोस्य $३ = \frac{१}{२}$
 (३) $२ \text{ स प्या} \pm ३$ अथवा $२ \text{ स प्या} \pm ३$, जहां कोज्या $३ = \frac{२}{३}$
 कोज्या $३ = -\frac{१}{३}$ समीकारों को सिद्ध करनेवाली ३
 और ३ की अल्पिष्ठ धन अर्हाण हैं।

$$\text{कोज्या अ} = \frac{२य (क्ष + य)}{क्ष^२ + २क्षय + २य^२}$$

$$\text{रफ अ} = \frac{क्ष (क्ष + २ य)}{२ य (क्ष + य)},$$

$$\text{व्युज्या अ} = \frac{क्ष^२ + २ क्ष य + २ य^२}{क्ष (क्ष + २ य)},$$

$$\text{व्युत्कोज्या अ} = \frac{क्ष^२ + २ क्ष य + २ य^२}{२ क्ष (क्ष + य)},$$

$$\text{कोरफ अ} = \frac{२ य (क्ष + य)}{क्ष (क्ष + २ य)}$$

$$(७) \pm \left(\frac{य + १}{य - १} \right)$$

$$(८) \frac{१५}{३७}$$

प्रश्नावलि ५

$$(१) .९९९९६२$$

$$(२) .००५८१७७$$

$$(३) २०६२६.३८८$$

$$(४) १.०००००००४२३१$$

$$(५) .०१७४५३३$$

$$(६) ३४'२३''$$

$$(७) ६'५२''.४३$$

$$(९) ३'५४''.३६$$

$$(१०) ५.१२ \text{ घटि, लगभग}$$

प्रश्नावलि ६

- (१) (क) 30° , 150° (का) 45° , 315° (कि) 150° , 330°
 (२) १

प्रश्नावलि ७

- (१) $\sin \theta + (-1)^n \frac{\cos \theta}{2}$ (२) $2 \sin \theta \pm \frac{\cos \theta}{2}$
 (३) $\sin \theta + \frac{3 \cos \theta}{4}$ (४) $\sin \theta \pm \frac{\cos \theta}{6}$
 (५) $\sin \theta \pm \frac{\cos \theta}{8}$ (६) $\sin \theta \pm \frac{\cos \theta}{6}$
 (९) $2 \sin \theta + \frac{\cos \theta}{8}$ (१०) $\frac{\cos \theta}{m-n}$

प्रश्नावलि ८

- (१) $2 \sin \theta \pm \frac{\cos \theta}{8}$ अथवा $2 \sin \theta \pm \frac{2 \cos \theta}{3}$
 (२) $\sin \theta + \frac{\cos \theta}{8}$ अथवा $\sin \theta + 1$, जहाँ कोस $1 = \frac{1}{2}$
 (३) $2 \sin \theta \pm 1$ अथवा $2 \sin \theta \pm \frac{1}{2}$, जहाँ कोज्या $1 = \frac{2}{3}$
 कोज्या $\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ समीकारों को सिद्ध करनेवाली इ
 और $\frac{1}{2}$ की अल्पिष्ठ धन अर्हापि हैं।

$$(४) २ स प्या \pm \frac{प्या}{२} \text{ अथवा } स प्या + \frac{प्या}{३}$$

$$(५) \frac{स प्या}{२} \text{ अथवा } \frac{(२ स + १) प्या}{१०}$$

$$(६) \frac{(४ स + १) प्या}{१२} \text{ अथवा } \frac{(४ स - १) प्या}{८}$$

$$(७) \frac{स प्या}{२} \pm \sqrt{१ + \frac{स^२ प्या^२}{४}}$$

(८) न और म कोई पूर्णांक हों, तो

$$द = (न + म + १) \frac{प्या}{२} \text{ और } ई = (न - म) \frac{प्या}{२} + \frac{प्या}{३}$$

(९) न और म कोई पूर्णांक हों, तो

$$य = \frac{१}{१६} \left[(१० म - ६ न) प्या \mp \frac{३ प्या}{४} \pm \frac{५ प्या}{३} \right]$$

$$र = \frac{१}{१६} \left[(१० न - ६ म) प्या \mp प्या \pm \frac{५ प्या}{४} \right]$$

$$(१०) ज्या अ = \frac{ख ग \pm क \sqrt{क^२ + ख^२ - ग^२}}{क^२ + ख^२}$$

प्रश्नावलि ९

$$(१) \frac{५६}{६५} - \frac{६३}{६५} = \frac{१६}{६३}$$

$$(३) \frac{प्या}{४}$$

प्रश्नावलि १०

(१) $५ + २\sqrt{६}$

प्रश्नावलि ११

(१) $\frac{४\text{स्प} क - ४\text{स्प}^३क}{१ - ६\text{स्प}^३क + \text{स्प}^३क}$

प्रश्नावलि १२

(१) $\frac{७\sqrt{१३०}}{१३०}$

(२) $\frac{n}{m}$

(३) $(१)\sqrt{२} + १$

प्रश्नावलि १४

(१) $२\text{सप्या अथवा } २\text{सप्या} + \frac{\text{प्या}}{२}$

(२) $\text{स. } ३६०^{\circ} + ९६^{\circ} ५२' \text{ अथवा स. } ३६०^{\circ} - २३^{\circ} ८'$

(३) $\text{सप्या} + (-१)\frac{\text{सप्या}}{६}$

(४) $२\text{सप्या अथवा } २\text{सप्या} + \frac{\text{प्या}}{४}$

- (४) $2 \text{ स प्या } \pm \frac{\text{प्या}}{2} \text{ अथवा } \text{स प्या} + \frac{\text{प्या}}{2}$
- (५) $\frac{\text{स प्या}}{2} \text{ अथवा } \frac{(2 \text{ म} + 1) \text{ प्या}}{10}$
- (६) $\frac{(४ \text{ स} + १) \text{ प्या}}{१२} \text{ अथवा } \frac{(४ \text{ स} - १) \text{ प्या}}{८}$
- (७) $\frac{\text{स प्या}}{२} \pm \sqrt{१ + \frac{\text{स}^२ \text{ प्या}^२}{४}}$
- (८) न और म कोई पूर्णांक हों, तो
 $इ = (न + म + १) \frac{\text{प्या}}{६} \text{ और } ई = (न - म) \frac{\text{प्या}}{२}$
- (९) न और म कोई पूर्णांक हों, तो
 $य = \frac{१}{१६} \left[(१० \text{ म} - ६ \text{ न}) \text{ प्या} \mp \frac{३ \text{ प्या}}{४} \pm \frac{५८}{२} \right]$
 $र = \frac{१}{१६} \left[(१० \text{ न} - ६ \text{ म}) \text{ प्या} \mp \frac{\text{प्या}}{४} \pm \frac{५८}{२} \right]$
- (१०) ज्या म = $\frac{\text{ख ग} \pm \text{क} \sqrt{\text{क}^२ + \text{ख}^२ - \text{ग}^२}}{\text{क}^२ + \text{ख}^२}$

प्रश्नावलि ९

- (१) $\frac{५६}{६५} \div \frac{६३}{६५} - \frac{१६}{६३}$
- (३) $\frac{\text{प्या}}{३}$

$$(14) \text{ स प्या अथवा } \frac{\text{स प्या}}{४} + (-1)^{\frac{\text{प्या}}{२४}}$$

प्रश्नावलि १६

$$(1) \text{ प्र} = 2\frac{1}{2}, \text{ प्र} = 1, \text{ प्र}_1 = 2, \text{ प्र}_2 = 3, \text{ प्र}_3 = 6$$

प्रश्नावलि १७

$$(2) \text{ २३ पाद; } २४\sqrt{३} \text{ वर्ग पाद}$$

उदाहरण (पृष्ठ २६६)

$$(1) \text{ २.२९५३} \quad (2) \text{ ३.८२३९} \quad (3) \text{ १.४०६३}$$

उदाहरण (पृष्ठ २६७)

$$(1) \text{ १.५०१} \quad (2) \text{ ७.०८१} \quad (3) \text{ २.५१२}$$

प्रश्नावलि १८

$$(1) \text{ (क) १.२३९ (ख) २.३८०४ (ग) ४.२५७८ (घ) १.१८५८६}$$

$$(2) \text{ २; ०; ५; ०; २}$$

$$(3) \text{ ०.१४०२; २.१८२}$$

$$(4) \text{ (क) ३.५५७ (ख) ११.२३}$$

$$(5) \text{ (क) } \frac{२८२१}{१०३३}; \frac{५४७६}{१०३३}; २९३२ \times १०^{११}$$

$$\text{ (ख) १.४१७; १.२०३; ०.४९६१}$$

- (५) $2स प्या + \frac{2प्या}{३}$ अथवा $२ स प्या$
- (७) $\left(स + \frac{१}{२}\right) \frac{प्या}{३}$ अथवा $स प्या \pm \frac{प्या}{३}$
- (८) $\frac{स प्या}{२}$ अथवा $स प्या + (-१)^{स-१} \frac{प्या}{२}$
- (९) $स प्या + \frac{प्या}{२}$ अथवा $स प्या \pm \frac{प्या}{३}$
- (१०) $स प्या + \frac{प्या}{४}$ अथवा $स प्या + ६$, जहां स्प $६ = \frac{१}{२}$
- (११) $\frac{स प्या}{२} + (-१)^स \frac{प्या}{१२}$
- (१२) $स प्या$ अथवा $\left(स - \frac{१}{४}\right) \frac{प्या}{२}$
- (१३) $२ स प्या + \frac{प्या}{२}$ अथवा $\frac{१}{५} \left(२ स प्या - \frac{प्या}{२}\right)$
- (१४) $\frac{स प्या}{३}$ अथवा $\frac{स प्या}{२}$
- (१५) $(२ स + १) \frac{प्या}{४}$ अथवा $२ स प्या \pm \frac{२ प्या}{३}$
- (१६) $\frac{स प्या}{३}$ अथवा $स प्या \pm ६$, जहां स्प $६ = \frac{१}{\sqrt{२}}$
- (१७) $स प्या + \frac{प्या}{४}$ अथवा $२ स प्या \pm \frac{प्या}{३}$

$$(16) \text{ स प्या अथवा } \frac{\text{स प्या}}{४} + (-1)^{\text{स प्या}} \frac{\text{प्या}}{२४}$$

प्रश्नावलि १६

$$(1) \text{ अ} = २\frac{१}{२}, \text{ ब} = १, \text{ ग} = २, \text{ घ} = ३, \text{ ङ} = ६$$

प्रश्नावलि १७

$$(2) \text{ २३ पाद; } २४\sqrt{३} \text{ वर्ग पाद}$$

उदाहरण (पृष्ठ २६६)

$$(1) \text{ २.९९५३} \quad (2) \text{ ३.८२३९} \quad (3) \text{ १.४०६३}$$

उदाहरण (पृष्ठ २६७)

$$(1) \text{ १.५०१} \quad (2) \text{ ७.०८१} \quad (3) \text{ २.५१२}$$

प्रश्नावलि १८

$$(1) \text{ (क) १.२३९ (ख) २.३८०५ (ग) ४.२५७८ (घ) १.१८५८६}$$

$$(2) \text{ २; ०; ५; ०; २}$$

$$(3) \text{ ०.१५०२; २.१८२}$$

$$(4) \text{ (क) ३.३४७ (ख) ११.२३}$$

$$(5) \text{ (क) } \frac{२८२१}{१०३३}; \frac{५४७६}{१०३१}; २९३२ \times १०११$$

$$(ख) \text{ १.४१७; १२०.३; ०.४९६१}$$

(७) (क) ९०.१८ (ख) ३७७१ (ग) २.३०२

(८) २७९०, १०२१४५, २२४२०

(९) $\frac{12}{2}$ और $-\frac{12}{3}$

(१०) (क) $\frac{1}{3}$ (ख) $\frac{1}{4}$ (ग) २

(११) (अ) (१) २२ (२) २१
(आ) (१) ९ वा (२) ७ वा

(१२) (१) १, $\frac{छे २}{छे ७}$ अर्थात् ३५.६

(२) $\frac{२ (छे ७ - छे ३)}{(६ छे २ - छे ३ - छे ७)}$ अर्थात् २.२४२२.....

(३) $y = \frac{२ ख^२ + गग + कग - कख - क^२}{क (ख + ग - क)},$

$$x = \frac{ख - क}{ख + ग - क}$$

जहाँ क = छे २, ख = छे ३, ग = छे ७

(१३) १.२९४७२६

(१४) १.२३९६३

प्रश्नावलि १९

(१) क = $५०^{\circ}३१'३०''$, ख = $१९^{\circ}२८'३०''$, गा = $९\sqrt{२}$

(२) का = $४०(\sqrt{६} - \sqrt{२})$, गा = $४०(२ - \sqrt{३})$

- (३) $k = 60^\circ$, $x = 30^\circ$, $ka = (8.3) \sqrt{3}$
 (४) $kx = 6 \sqrt{3}$ पाद; $kg = 6.062$ पाद;
 ' $kx = 3 \sqrt{3}$ पाद; $gx = 6.192$ पाद

प्रश्नावलि २०

- (२) $25^\circ 21'$
 (३) $28^\circ 47'$; $46^\circ 33'$; $103^\circ 29'$
 (५) $k = 48^\circ 11' 20''$, $x = 48^\circ 28' 40''$, $g = 73^\circ 28'$
 (६) $k = 104^\circ$, $x = 14^\circ$, $g = 60^\circ$
 (७) $k = 44^\circ$, $x = 74^\circ$, $g = 60^\circ$
 (८) $k = 37^\circ 22' 12''$, $x = 43^\circ 31'$, $g = 66^\circ 49' 44''$

प्रश्नावलि २१

- (१) $k = 63^\circ 39' 30''$, $x = 42^\circ 20' 20''$, $ga = 196.7$
 (२) $k = 106^\circ 26' 12''$, $x = 16^\circ 26'$
 (३) $g = 116^\circ 38' 44''$, $k = 27^\circ 38' 44''$
 (४) $k = 49^\circ 38' 24''$, $x = 36^\circ 48' 14''$
 (५) $x = 90^\circ$, $g = 30^\circ$, $ka : xa = \sqrt{3} : 2$
 (६) $k = 124^\circ 48' 40''$, $x = 33^\circ 11' 20''$
 (७) $x = 66^\circ 49'$, $g = 46^\circ 41'$
 (८) $x = 106^\circ 36' 20''$, $g = 31^\circ 23' 30''$
 (९) $x = 98^\circ 42' 40''$, $g = 24^\circ 16' 20''$
 (१०) $x = 74^\circ$, $g = 30^\circ$, $ka = \sqrt{6}$

प्रश्नावलि २२

- (१) खा = 2.3534 , गा = 3.1504
- (२) ग = $35^{\circ}20'$, खा = 368.2 , गा = 213.4
- (३) 172.6
- (४) ग = $70^{\circ}30'$, खा = 18.46 , गा = 39.16
- (५) 13.36

प्रश्नावलि २३

- (१) (१) एक त्रिभुज संभव है।
 $ग = 35^{\circ}24'$, $क = 29^{\circ}29'$, $का = 13.42$
 (२) दो त्रिभुज संभव हैं।
 $ग_1 = 49^{\circ}49'$, $क_1 = 99^{\circ}19'$, $का_1 = 42.42$
 $ग_2 = 130^{\circ}1'$, $क_2 = 19^{\circ}19'$, $का_2 = 14.23$
 (३) एक भी त्रिभुज संभव नहीं।
 (४) एक लंबकोण त्रिभुज संभव है।
 $ग = 90^{\circ}$, $क = 44^{\circ}$, $का = 8\sqrt{2}$
- (२) $क_1 = 63^{\circ}44'$, $ख_1 = 67^{\circ}28'$, $खा_1 = 48.14$
 $क_2 = 116^{\circ}4'$, $ख_2 = 14^{\circ}18'$, $खा_2 = 16.62$
- (३) दूसरी दशा संदिग्ध है।
 $ग_1 = 38^{\circ}31'$, $ख_1 = 111^{\circ}19'$, $खा_1 = 372.6$ पाद
 $ग_2 = 141^{\circ}19'$, $ख_2 = 8^{\circ}31'$, $खा_2 = 60.29$ पाद
- (४) 39.34 , 28.21

- (५) $ग_1 = 30^\circ$, $ख_1 = 104^\circ$, $गा_1 = \sqrt{2}$;
 $ग_2 = 60^\circ$, $ख_2 = 71^\circ$, $गा_2 = \sqrt{6}$
 (६) $ख = 26^\circ 16' 40''$, $ग = 119^\circ 43' 20''$, $गा = 442.06$

प्रश्नावलि २४

- (३) $3 : 2\sqrt{3} + \sqrt{4} : 4$
 (४) $40^\circ 43' 30''$, 60° , $72^\circ 4' 30''$, $4\sqrt{7}$
 (५) $71^\circ 12'$, $82^\circ 23'$, $22^\circ 23'$
 (६) 120°
 (७) $क = 90^\circ 48'$, $ख = 89^\circ 6'$,
 $का = 4$, $खा = 8$, $गा = \sqrt{21}$
 (८) $क = 20^\circ 44' 12''$, $ख = 26^\circ 30' 24''$,
 $खा = 40.006$ पाद, $गा = 64.998$ पाद
 (९) $क = 42^\circ 30' 40''$, $खा = 104$ पाद
 (१०) $का = 36.04$, $खा = 29.32$, $गा = 41.62$

प्रश्नावलि २५

- (१) $37\sqrt{3}$ पाद (२) $7\frac{13}{17}$ पाद
 (३) $ह$, जहां $स्पड = \frac{1}{17}$ (४) 1673.76 पाद
 (५) 224.2 पाद (६) $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$ कोशक

(८) २०० $\sqrt{३}$ पाद

(९) १०७.२ पाद

(११) $\frac{य}{\sqrt{२}}$ —

प्रश्नावलि २६

(१५) (१) १ (२) २क^२—१

(१६) $\frac{१}{६}$

पारिभाषिक शब्दावलि आंगल-हिन्दी

acute angle न्यून कोण, त्रिकोण	arc चाप
according as तदनुसार	area क्षेत्रफल
addition योग	arithmetic progression समा- तर श्रेढी
addition theorem योगप्रमेय	article अनुच्छेद
adjacent संलग्न	at rest गतिहीन, विश्रामस्थ
admissible ग्राह्य	bar शिरोदंड
algebra बीजगणित	bisector अर्धक
algebraically बीजीय रीति से	bounded सीमित
aliter (otherwise) अन्यथा	bounding arc मर्यादा-चाप
alternative वैकल्पिक	bounding line मर्यादा-रेखा
altitude उच्छ्राय	calculation गणन
ambiguity संदिग्धता	case दशा
ambiguous case संदिग्ध दशा	centesimal शतिक
angle of depression अवनति- कोण	centimeter शतिमान
angle of elevation उन्नति-कोण	centre केन्द्र
angular points कोणबिन्दु	characteristic लक्षण
anticlockwise प्रतिघटीय	circle वृत्त
antilogarithm प्रतिच्छेदा	circular वर्तुल
approximate लगभग, स्थूल रूप से, उपसादित, उपसन्न (brought near)	circular measure वर्तुल माप
	circumcentre परिकेन्द्र
	circumcircle परिवृत्त

circumradius परित्रिज्या
 circumscribe परिलेखन
 clockwise घटीवत्
 coincide (Lat *co* सम् +
incidere— to fall upon
 पतन) सपतन्
 coincidence सपतन्, सपात
 coincident सपाती
 common साधारण
 common to both उभयसाधारण
 common difference भ्रम
 common system of logarithms सामान्य छेदापद्धति,
 दशच्छेदापद्धति (base is 10)
 complementary angle सम्पूरकोण
 concyclic संवृत्तीय
 condition प्रतिबंध
 congruent सर्वांगसम
 constant अचल, स्थिरांक
 continuous सतत
 conversely विलोम क्रमेण, विलोमत
 convert परिवर्तन
 corresponding सबादी
 corollary 1 (to a theorem) उपप्रमेय
 □ (to a problem) उपनिर्मेय
 3 (to a proposition) उपसाध्य

cosecant (cosec) व्युत्क्रमज्या (व्युज्ज्या)
 cosine (cos) कोटिज्या (कोज्या)
 cotangent (cot) कोटिस्पर्शज्या, कोटिस्पज्या (कोस्प)
 covered sine उत्क्रमकोटिज्या (उत्को)
 curve वक्र
 cyclic वृत्तीय, चक्रीय
 data न्यास, पक्ष
 decagon दशकोण, दशभुज
 decimal दशमिक
 definition परिभाषा
 degree अंश
 denominator हर
 diagonal त्रिकर्ण
 diameter व्यास
 disc विम्ब
 division भाजन
 element अण्वयव
 equation समीकार
 equilateral समभुजीय
 equilateral triangle समत्रिभुज
 escribe बहिर्लेखन
 escribed बहिर्लिखित
 even युग्म
 exact यथार्थ
 excentre बहिष्केन्द्र
 excircle बहिर्वृत्त
 expansion विस्तार

express व्यक्त करना
 expression पदसङ्घति, व्यञ्जक
 exradius बहिर्विज्या
 exterior angle बहिर्वृज्कोण
 external bisector बाह्य अर्धन
 externally बाह्यत
 final अंतिम
 finite परिमित
 fixed स्थिर
 foot पाद
 formula सूत्र
 fraction भिन्न
 function श्रित
 fundamental मूलभूत
 general सामान्य
 geometrical progression गुणो
 त्तर श्रेढी
 geometry रैखिकी
 grade अंशक
 graph बिन्दुरेष
 harmonic mean हरामरु मध्यक
 hexagon षट्कोण, षट्भुज
 horizontal क्षैतिज
 hypotenuse कर्ण
 identical ऐकात्म, सर्वांगसम
 identity ऐकान्य
 illustrative निदर्शनात्मक
 imaginary काल्पनिक
 incentre अंतर्केन्द्र
 incircle अंतर्वृत्त

inclination नति
 included अंतर्गत
 index of the power घातांक
 inequality असमता
 infinite अनन्त
 infinite series अनन्त श्रेढी
 infinitesimal अत्यल्प
 infinity अनन्ती
 initial आदि, आदिम
 initial line आदि रेखा
 initial position आन्तिम स्थिति
 inradius अंतर्विज्या
 inscribe अन्वर्षण
 integer पूर्णांक
 integral अनुकल
 internal angle अंतर्कोण
 internal bisector अन्तरार्धन
 internally अन्तरत
 intersect मिथरहेदन, छेदन
 inverse प्रतीप
 involved अंतर्भूत
 isosceles triangle द्विसमत्रिभुज
 latitude अक्षवृत्त
 law नियम
 left hand side वाम पक्ष
 length लम्बाई, आयाम
 level समतल
 limit सीमा
 logarithm छेदा
 magnitude महत्ता

mantissa (the decimal part
of common logarithms)

दशमिकांश

mean मध्यक

measure माप

measurement of angles कोण
मापन

median मध्यगा

meridian ध्रुववृत्त

mile कोशक

minus मिनस

minute कला

most general सामान्यतम

multiple अपनत्य

natural प्राकृत

negative ऋण

notation संकेतना

numerator अंश

numerical संख्यात्मक

object वस्तु

obtuse angle अधिकोण

octagon अष्टकोण, अष्टभुज

odd अयुग्म

opposite विरुद्ध, विपरीत, सम्मुख

origin मूलबिंदु

orthocentre लम्बकेंद्र

otherwise अन्यथा

parallel समान्तर

partly अंशत

pedal triangle पदिक त्रिभुज

pentagon पंचकोण, पंचभुज

perimeter परिमाप

period आवर्तकाल

periodic आवर्तीय

perpendicular लम्ब

plane समतल

point of contact संपर्क बिन्दु

polygon बहुभुज

position स्थिति

positive धा

power घात

principle प्रतिपाद

problem विषय

product गुणनफल

progression श्रेणी

properties गुण

proportional अनुपाती

quadrant चरण

quadratic equation वर्ग-

समीकरण, द्विघात-समीकरण

quadrilateral चतुर्भुज

quantity राशि

quotient भागफल

radian १५५ आर (from radius

अर), संचापादकोण m (स

equal + चाप arc + अर

radius—an angle subten-

ded by an arc equal

in length to the radius)

2 *adj* आरीय

radius vector सदिश त्रिज्या

raise उन्नयन, उच्चयन

raised उन्नत

6 raised to 5 ६ उन्नत ५

6 raised to the power 5
६ घात ५

ratio निष्पत्ति

real वास्तविक

reciprocal व्युत्क्रम

rectangle आयत

regular नियमित

relation संबंध

represent निरूपण

restriction निबंध

result फल

revolution परिभ्रमण

revolving line परिभ्रमण रेखा

right angle रैखकोण

right-hand side दक्षिण पक्ष

root मूल

rule नियम

satisfy 1 (an equation) (ली-
कार) समाधान करना

2 (a condition) (प्रतिबन्ध)
पालन करना

secant (sec) व्युत्क्रमकोटिज्या
(व्युत्कोज्या)

second काष्ठिका

section छेद

section of a sphere गोलीय-
छेद

sector शकल

sector of a circle वृत्त-शकल

segment खण्ड

semiperimeter सामिपरिमाप

series श्रेणी

sexagesimal पाष्टिक

sextant पष्टक

side 1 (of a solid) पार्श्व

2 (of an equation) पक्ष

3 (of a triangle) भुजा

similar समरूप

simplify सरल करना

side (sin) ज्या

size परिमाण

solution (result) फल

solution of a triangle त्रिभुज-
विधारण

sphere गोल

square 1 (power) वर्ग

2 (figure) समागत

3 square root वर्गमूल

4 square द्विघातन

5 square and adding वर्ग-
योग करना

standard प्रमाण

submultiple अपवर्तक

substitution आदेश

subtend आघातन

subtraction वियोग

suffix पादांक

sum योग
 supplementary angle ऋजु-
 पूर कोण
 symbol प्रतीक
 system पद्धति
 table सारणी
 tangent (tan) स्पर्शज्या, स्पर्ज्या
 (स्प)
 tangent (line) स्पर्शी, स्पर्शरेखा
 tendency प्रवृत्ति
 theodolite विकोणमान
 theorem प्रमेय
 theory सिद्धान्त
 throughout साधत
 trace अनुरेखण
 traced out अनुरेखित

trigonometry त्रिकोणमिति
 trigonometrical त्रिकोणमितीय
 uniform 1 एकरूप
 2 (homogeneous) समांग
 unit एकक
 unknown अज्ञात
 verify सत्यापन
 versed sine उष्कमज्या (उज्ज्या)
 vertical उदग्र

Symbols

π प्या
 Lt. (limit) सी (सीमा)
 log (logarithm) ले (लेदा)
 ' (dash) ' (प्रास)

पारिभाषिक शब्दावलि

हिन्दी-आंग्ल

अंश numerator	अंतर्लेखन inscribe
अंश degree	अंतर्गुत्त incircle
अंशक grade	अंतरिज्या inradius
अंशत partly	अंतिम final
अक्षवृत्त latitude	अन्यथा aliter (otherwise)
अचल constant	अपर्यक्त submultiple
अज्ञात unknown	अपवर्त्य multiple
अल्पसु infinitesimal	अयुग्म odd
अधिकोण obtuse angle	अर्ह value
अनन्त infinite	अल्पिष्ठ least
अनन्त श्रृंखला infinite series	अवनति-कोण angle of depression
अनन्ती infinity	अवयव element
अनियत indefinitely	अष्टकोण, अष्टभुज octagon
अनुकूल integral	असमता inequality
अनुच्छेद article	आदि, आदिम initial
अनुपाती proportional	आदिम स्थिति initial position
अनुरेखण trace	आदि रेखा initial line
अनुरेखित traced out	आदेश substitution
अंत केन्द्र incentro	आधार base
अंत कोण internal angle	आन्तर अर्धरेखा internal bisector
अंतर्गत included	आपातन subtend

आयत rectangle	काल्पनिक imaginary
आयाम length	काटिका second
धार (from धर), सचापार-कोण radian =	केन्द्र centre
धारीय radian <i>ady</i>	कोटिज्या (कोज्या) cosine (cos)
धावर्त, आवर्तकाल period	कोटिस्पर्शज्या, कोटिरपज्या (कोस्प) cotangent (cot)
नावर्तीय periodic	कोणबिन्दु angular points
उच्छ्राय altitude	कोण नापन measurement of angles
उत्क्रमकोटिज्या (उत्को) covered sine	कोशक mile
उत्क्रमज्या (उत्ज्या) versed sine	क्षेत्रफल area
उदग्र vertical	क्षितिज horizontal
उन्नत raised	खण्ड segment
६ उन्नत ५ 6 raised to 5	गणन calculation
उन्नति-कोण angle of elevation	गतिहीन motionless, at rest
उन्नयन raise	गुण properties
उपसन्न approximate (brought together)	गुणनफल product
उपसादित approximate	गुणोत्तर श्रेणी geometrical pro gression
उपसाध्य corollary	गोल sphere
उभय-साधारण common to both	गोलीय छेद section of a sphere
अनुपूर कोण supplementary angle	ग्राह्य admissible
ऋण negative	घटीयत् clockwise
एकक unit	घात power
ऐक्यात्म identical	६ घात ५ 6 raised to the power 5
ऐक्यात्म्य identity	घातांक index of the power
कर्ण hypotenuse	चकित cyclic
मला minute	चतुर्भुज quadrilateral
	चरण quadrant
	चल variable

चाप arc	निर्धारण solution (of a tri- angle)
छेद section	निर्मेय problem
छेदा logarithm	निष्पत्ति ratio
ज्या sine (sin)	न्यास, पक्ष data
तदनुसार according as	न्यून कोण acute angle
त्रिकोणमिति trigonometry	पक्ष side of an equation
त्रिकोणमितीय trigonometrical	पञ्चभुज, पञ्चकोण pentagon
दक्षिण पक्ष right hand side	परसहति expression
दशच्छेदा-पद्धति, साधारण छेदा पद्धति common system of logarithms	पदिक pedal
दशभुज, दशकोण decagon	पद्धति system
दशमिक decimal	परिकेंद्र circumcentre
दशमिकाश mantissa	परित्रिज्या circumradius
दशा, प्रकार case	परिभाषा definition
द्विघातन squaring	परिभ्रमण revolution
द्विघात समीकार quadratic equation	परिभ्रमण रेखा revolving line
द्विसमत्रिभुज isosceles triangle	परिमाण size
धन positive	परिमाण perimeter
ध्रुव pole	परिमित finite
ध्रुवयुक्त meridian	परिलेखन circumscribe
नति inclination	परिवर्तन convert
निदर्शनात्मक illustrative	परितृप्त circumcircle
निग्रह restriction	पाद foot
नियम law	पादाक्ष suffix
नियमित regular	पार्श्व side of a solid
निरूपण represent	पालन (प्रतिबध) satisfy (a condition)
	पूर्णांक integer
	प्रचय common difference
	प्रतिघटीन्त anticlockwise

प्रतिच्छेदा antilogarithm	मर्यादा चाप bounding arc
प्रतिबध condition	मर्यादा रेखा bounding line
प्रतीक symbol	महत्ता magnitude
प्रतीप inverse	माप measure
प्रनियम principle	मिथस्छेदन, छेदन intersect
प्रमाण standard	मूल root
प्रमेय theorem	मूलबिंदु origin
प्रवृत्ति tendency	मूलभूत fundamental
प्राकृत natural	यथार्थ exact
प्रांगुल inch	यट्टि yard
फल result, solution	योग sum, addition
बहिर्लिखित escribed	योग प्रमेय addition theorem
बहिर्लेखन escribe	राशि quantity
बहिर्घृत exccircle	रैसिमी geometry
बहिर्ष्केन्द्र excentre	लक्षण characteristic
बहिष्कोण exterior angle	लव perpendicular
बहिस्त्रिज्या exradius	लंबकेंद्र orthocentre
बहुभुज polygon	लंबकोण right angle
बाह्य अर्धरु external bisector	लंबपूर complementary
बाह्यतः externally	वक्र curve
बिंदुरेख graph	वर्ग square (quantity)
विन disc	वर्गमूल square root
बीजगणित algebra	वर्गयोग करण squaring and
बीजिक रीति से algebraically	adding
भागफल quotient	वर्ग समीकार quadratic equa-
भाजन division	tion
भिन्न fraction	वर्तुल circular
भुजा side of a triangle	वर्तुल माप circular measure
मध्यक mean	वस्तु object
मध्यगा median	

चाम पक्ष left hand side

वास्तविक real

विरुण diagonal

त्रिकोणमान theodolite

विचरण variation

वियुत minus

वियोग subtraction

विधामस्थ at rest

विषम odd

विस्तार expansion

वृत्त circle

वृत्त शकल sector of a circle

वृत्तीय cyclic

वैरक्षिक alternative

व्यक्त करना express

व्यक्ति expression

व्यत्यासत conversely

व्यास diameter

व्युक्रम reciprocal

व्युत्क्रमकोटिज्या, व्युत्कोज्या

(व्युको) secant (sec)

व्युत्क्रमज्या (व्युज्या) co secant

(cosec)

शकल sector

शतक centesimal

शत्रिमान centimetre

शिरोदृढ bar

शिरोविन्दु vertex

शून्य zero

श्रितु function

श्रेढी progression

षड्भुज, षट्कोण hexagon

षष्ठक sextant

षाष्टिक sexagesimal

संलग्न adjacent

समादी corresponding

संवृत्तीय concyclic

संस्पर्श बिन्दु point of contact

संकेतना notation

संख्यात्मक numerical

सचापार-कोण radian

संतत continuous

सत्यापन verification

सन्दिग्ध त्रिज्या radius vector

संदिग्धता ambiguity

सम even

समतल plane

समत्रिभुज equilateral tri-

angle

समरूप similar

समाग uniform (homogene-

ous)

समाधान satisfy (an equa-

tion)

समांतर parallel

समांतर श्रेढी arithmetic

progression

समायत square (figure)

समीकरण equation

सपतन coincide

उद्देश-सारणी (logarithmic tables)

ᐅ	ᑦ	ᓂ	ᓄ	ᓆ	ᓈ	ᓊ	ᓌ	ᓎ	ᓐ	ᓑ	ᓔ	ᓖ	ᓗ	ᓙ	ᓛ	ᓞ	ᓠ	ᓣ	ᓤ	ᓥ	ᓦ	ᓧ	ᓨ	ᓩ	ᓪ	ᓫ	ᓬ	ᓭ	ᓮ	ᓯ	ᓰ	ᓱ	ᓲ	ᓳ	ᓴ	ᓵ	ᓶ	ᓷ	ᓸ	ᓹ	ᓺ	ᓻ	ᓼ	ᓽ	ᓾ	ᓿ	ᔀ	ᔁ	ᔂ	ᔃ	ᔄ	ᔅ	ᔆ	ᔇ	ᔈ	ᔉ	ᔊ	ᔋ	ᔌ	ᔍ	ᔎ	ᔏ	ᔐ	ᔑ	ᔒ	ᔓ	ᔔ	ᔕ	ᔖ	ᔗ	ᔘ	ᔙ	ᔚ	ᔛ	ᔜ	ᔝ	ᔞ	ᔟ	ᔠ	ᔡ	ᔢ	ᔣ	ᔤ	ᔥ	ᔦ	ᔧ	ᔨ	ᔩ	ᔪ	ᔫ	ᔬ	ᔭ	ᔮ	ᔯ	ᔰ	ᔱ	ᔲ	ᔳ	ᔴ	ᔵ	ᔶ	ᔷ	ᔸ	ᔹ	ᔺ	ᔻ	ᔼ	ᔽ	ᔾ	ᔿ	ᕀ	ᕁ	ᕂ	ᕃ	ᕄ	ᕅ	ᕆ	ᕇ	ᕈ	ᕉ	ᕊ	ᕋ	ᕌ	ᕍ	ᕎ	ᕏ	ᕐ	ᕑ	ᕒ	ᕓ	ᕔ	ᕕ	ᕖ	ᕗ	ᕘ	ᕙ	ᕚ	ᕛ	ᕜ	ᕝ	ᕞ	ᕟ	ᕠ	ᕡ	ᕢ	ᕣ	ᕤ	ᕥ	ᕦ	ᕧ	ᕨ	ᕩ	ᕪ	ᕫ	ᕬ	ᕭ	ᕮ	ᕯ	ᕰ	ᕱ	ᕲ	ᕳ	ᕴ	ᕵ	ᕶ	ᕷ	ᕸ	ᕹ	ᕺ	ᕻ	ᕼ	ᕽ	ᕾ	ᕿ	ᖀ	ᖁ	ᖂ	ᖃ	ᖄ	ᖅ	ᖆ	ᖇ	ᖈ	ᖉ	ᖊ	ᖋ	ᖌ	ᖍ	ᖎ	ᖏ	ᖐ	ᖑ	ᖒ	ᖓ	ᖔ	ᖕ	ᖖ	ᖗ	ᖘ	ᖙ	ᖚ	ᖛ	ᖜ	ᖝ	ᖞ	ᖟ	ᖠ	ᖡ	ᖢ	ᖣ	ᖤ	ᖥ	ᖦ	ᖧ	ᖨ	ᖩ	ᖪ	ᖫ	ᖬ	ᖭ	ᖮ	ᖯ	ᖰ	ᖱ	ᖲ	ᖳ	ᖴ	ᖵ	ᖶ	ᖷ	ᖸ	ᖹ	ᖺ	ᖻ	ᖼ	ᖽ	ᖾ	ᖿ	ᗀ	ᗁ	ᗂ	ᗃ	ᗄ	ᗅ	ᗆ	ᗇ	ᗈ	ᗉ	ᗊ	ᗋ	ᗌ	ᗍ	ᗎ	ᗏ	ᗐ	ᗑ	ᗒ	ᗓ	ᗔ	ᗕ	ᗖ	ᗗ	ᗘ	ᗙ	ᗚ	ᗛ	ᗜ	ᗝ	ᗞ	ᗟ	ᗠ	ᗡ	ᗢ	ᗣ	ᗤ	ᗥ	ᗦ	ᗧ	ᗨ	ᗩ	ᗪ	ᗫ	ᗬ	ᗭ	ᗮ	ᗯ	ᗰ	ᗱ	ᗲ	ᗳ	ᗴ	ᗵ	ᗶ	ᗷ	ᗸ	ᗹ	ᗺ	ᗻ	ᗼ	ᗽ	ᗾ	ᗿ	ᘀ	ᘁ	ᘂ	ᘃ	ᘄ	ᘅ	ᘆ	ᘇ	ᘈ	ᘉ	ᘊ	ᘋ	ᘌ	ᘍ	ᘎ	ᘏ	ᘐ	ᘑ	ᘒ	ᘓ	ᘔ	ᘕ	ᘖ	ᘗ	ᘘ	ᘙ	ᘚ	ᘛ	ᘜ	ᘝ	ᘞ	ᘟ	ᘠ	ᘡ	ᘢ	ᘣ	ᘤ	ᘥ	ᘦ	ᘧ	ᘨ	ᘩ	ᘪ	ᘫ	ᘬ	ᘭ	ᘮ	ᘯ	ᘰ	ᘱ	ᘲ	ᘳ	ᘴ	ᘵ	ᘶ	ᘷ	ᘸ	ᘹ	ᘺ	ᘻ	ᘼ	ᘽ	ᘾ	ᘿ	ᙀ	ᙁ	ᙂ	ᙃ	ᙄ	ᙅ	ᙆ	ᙇ	ᙈ	ᙉ	ᙊ	ᙋ	ᙌ	ᙍ	ᙎ	ᙏ	ᙐ	ᙑ	ᙒ	ᙓ	ᙔ	ᙕ	ᙖ	ᙗ	ᙘ	ᙙ	ᙚ	ᙛ	ᙜ	ᙝ	ᙞ	ᙟ	ᙠ	ᙡ	ᙢ	ᙣ	ᙤ	ᙥ	ᙦ	ᙧ	ᙨ	ᙩ	ᙪ	ᙫ	ᙬ	᙭	᙮	ᙯ	ᙰ	ᙱ	ᙲ	ᙳ	ᙴ	ᙵ	ᙶ	ᙷ	ᙸ	ᙹ	ᙺ	ᙻ	ᙼ	ᙽ	ᙾ	ᙿ		ᚁ	ᚂ	ᚃ	ᚄ	ᚅ	ᚆ	ᚇ	ᚈ	ᚉ	ᚊ	ᚋ	ᚌ	ᚍ	ᚎ	ᚏ	ᚐ	ᚑ	ᚒ	ᚓ	ᚔ	ᚕ	ᚖ	ᚗ	ᚘ	ᚙ	ᚚ	᚛	᚜	᚝	᚞	᚟	ᚠ	ᚡ	ᚢ	ᚣ	ᚤ	ᚥ	ᚦ	ᚧ	ᚨ	ᚩ	ᚪ	ᚫ	ᚬ	ᚭ	ᚮ	ᚯ	ᚰ	ᚱ	ᚲ	ᚳ	ᚴ	ᚵ	ᚶ	ᚷ	ᚸ	ᚹ	ᚺ	ᚻ	ᚼ	ᚽ	ᚾ	ᚿ	ᛀ	ᛁ	ᛂ	ᛃ	ᛄ	ᛅ	ᛆ	ᛇ	ᛈ	ᛉ	ᛊ	ᛋ	ᛌ	ᛍ	ᛎ	ᛏ	ᛐ	ᛑ	ᛒ	ᛓ	ᛔ	ᛕ	ᛖ	ᛗ	ᛘ	ᛙ	ᛚ	ᛛ	ᛜ	ᛝ	ᛞ	ᛟ	ᛠ	ᛡ	ᛢ	ᛣ	ᛤ	ᛥ	ᛦ	ᛧ	ᛨ	ᛩ	ᛪ	᛫	᛬	᛭	ᛮ	ᛯ	ᛰ	ᛱ	ᛲ	ᛳ	ᛴ	ᛵ	ᛶ	ᛷ	ᛸ	᛹	᛺	᛻	᛼	᛽	᛾	᛿	ᜀ	ᜁ	ᜂ	ᜃ	ᜄ	ᜅ	ᜆ	ᜇ	ᜈ	ᜉ	ᜊ	ᜋ	ᜌ	ᜍ	ᜎ	ᜏ	ᜐ	ᜑ	ᜒ	ᜓ	᜔	᜕	᜖	᜗	᜘	᜙	᜚	᜛	᜜	᜝	᜞	ᜟ	ᜠ	ᜡ	ᜢ	ᜣ	ᜤ	ᜥ	ᜦ	ᜧ	ᜨ	ᜩ	ᜪ	ᜫ	ᜬ	ᜭ	ᜮ	ᜯ	ᜰ	ᜱ	ᜲ	ᜳ	᜴	᜵	᜶	᜷	᜸	᜹	᜺	᜻	᜼	᜽	᜾	᜿	ᝀ	ᝁ	ᝂ	ᝃ	ᝄ	ᝅ	ᝆ	ᝇ	ᝈ	ᝉ	ᝊ	ᝋ	ᝌ	ᝍ	ᝎ	ᝏ	ᝐ	ᝑ	ᝒ	ᝓ	᝔	᝕	᝖	᝗	᝘	᝙	᝚	᝛	᝜	᝝	᝞	᝟	ᝠ	ᝡ	ᝢ	ᝣ	ᝤ	ᝥ	ᝦ	ᝧ	ᝨ	ᝩ	ᝪ	ᝫ	ᝬ	᝭	ᝮ	ᝯ	ᝰ	᝱	ᝲ	ᝳ	᝴	᝵	᝶	᝷	᝸	᝹	᝺	᝻	᝼	᝽	᝾	᝿	ក	ខ	គ	ឃ	ង	ច	ឆ	ជ	ឈ	ញ	ដ	ឋ	ឌ	ឍ	ណ	ត	ថ	ទ	ធ	ន	ប	ផ	ព	ភ	ម	យ	រ	ល	វ	ឝ	ឞ	ស	ហ	ឡ	អ	ឣ	ឤ	ឥ	ឦ	ឧ	ឨ	ឩ	ឪ	ឫ	ឬ	ឭ	ឮ	ឯ	ឰ	ឱ	ឲ	ឳ	឴	឵	ា	ិ	ី	ឹ	ឺ	ុ	ូ	ួ	ើ	ឿ	᠀	᠁	᠂	᠃	᠄	᠅	᠆	᠇	᠈	᠉	᠊	᠋	᠌	᠍	᠎	᠏	᠐	᠑	᠒	᠓	᠔	᠕	᠖	᠗	᠘	᠙	᠚	᠛	᠜	᠝	᠞	᠟	ᠠ	ᠡ	ᠢ	ᠣ	ᠤ	ᠥ	ᠦ	ᠧ	ᠨ	ᠪ	ᠴ	ᠰ	ᠲ	ᠶ	ᠸ	ᠺ	ᠼ	ᠽ	ᠿ	ᡀ	ᡁ	ᡂ	ᡃ	ᡄ	ᡅ	ᡆ	ᡇ	ᡈ	ᡉ	ᡊ	ᡋ	ᡌ	ᡍ	ᡎ	ᡏ	ᡐ	ᡑ	ᡒ	ᡓ	ᡔ	ᡕ	ᡖ	ᡗ	ᡘ	ᡙ	ᡚ	ᡛ	ᡜ	ᡝ	ᡞ	ᡟ	ᡠ	ᡡ	ᡢ	ᡣ	ᡤ	ᡥ	ᡦ	ᡧ	ᡨ	ᡩ	ᡪ	ᡫ	ᡬ	ᡭ	ᡮ	ᡯ	ᡰ	ᡱ	ᡲ	ᡳ	ᡴ	ᡵ	ᡶ	ᡷ	ᡸ	᡹	᡺	᡻	᡼	᡽	᡾	᡿	ᢀ	ᢁ	ᢂ	ᢃ	ᢄ	ᢅ	ᢆ	ᢇ	ᢈ	ᢉ	ᢊ	ᢋ	ᢌ	ᢍ	ᢎ	ᢏ	ᢐ	ᢑ	ᢒ	ᢓ	ᢔ	ᢕ	ᢖ	ᢗ	ᢘ	ᢙ	ᢚ	ᢛ	ᢜ	ᢝ	ᢞ	ᢟ	ᢠ	ᢡ	ᢢ	ᢣ	ᢤ	ᢥ	ᢦ	ᢧ	ᢨ	ᢩ	ᢪ	᢫	᢬	᢭	᢮	᢯	ᢰ	ᢱ	ᢲ	ᢳ	ᢴ	ᢵ	ᢶ	ᢷ	ᢸ	ᢹ	ᢺ	ᢻ	ᢼ	ᢽ	ᢾ	ᢿ	ᣀ	ᣁ	ᣂ	ᣃ	ᣄ	ᣅ	ᣆ	ᣇ	ᣈ	ᣉ	ᣊ	ᣋ	ᣌ	ᣍ	ᣎ	ᣏ	ᣐ	ᣑ	ᣒ	ᣓ	ᣔ	ᣕ	ᣖ	ᣗ	ᣘ	ᣙ	ᣚ	ᣛ	ᣜ	ᣝ	ᣞ	ᣟ	ᣠ	ᣡ	ᣢ	ᣣ	ᣤ	ᣥ	ᣦ	ᣧ	ᣨ	ᣩ	ᣪ	ᣫ	ᣬ	ᣭ	ᣮ	ᣯ	ᣰ	ᣱ	ᣲ	ᣳ	ᣴ	ᣵ	᣶	᣷	᣸	᣹	᣺	᣻	᣼	᣽	᣾	᣿	ᤀ	ᤁ	ᤂ	ᤃ	ᤄ	ᤅ	ᤆ	ᤇ	ᤈ	ᤉ	ᤊ	ᤋ	ᤌ	ᤍ	ᤎ	ᤏ	ᤐ	ᤑ	ᤒ	ᤓ	ᤔ	ᤕ	ᤖ	ᤗ	ᤘ	ᤙ	ᤚ	ᤛ	ᤜ	ᤝ	ᤞ	᤟	ᤠ	ᤡ	ᤢ	ᤣ	ᤤ	ᤥ	ᤦ	ᤧ	ᤨ	ᤩ	ᤪ	ᤫ	᤬	᤭	᤮	᤯	ᤰ	ᤱ	ᤲ	ᤳ	ᤴ	ᤵ	ᤶ	ᤷ	ᤸ	᤹	᤺	᤻	᤼	᤽	᤾	᤿	᥀	᥁	᥂	᥃	᥄	᥅	᥆	᥇	᥈	᥉	᥊	᥋	᥌	᥍	᥎	᥏	ᥐ	ᥑ	ᥒ	ᥓ	ᥔ	ᥕ	ᥖ	ᥗ	ᥘ	ᥙ	ᥚ	ᥛ	ᥜ	ᥝ	ᥞ	ᥟ	ᥠ	ᥡ	ᥢ	ᥣ	ᥤ	ᥥ	ᥦ	ᥧ	ᥨ	ᥩ	ᥪ	ᥫ	ᥬ	ᥭ	᥮	᥯	ᥰ	ᥱ	ᥲ	ᥳ	ᥴ	᥵	᥶	᥷	᥸	᥹	᥺	᥻	᥼	᥽	᥾	᥿	ᦀ	ᦁ	ᦂ	ᦃ	ᦄ	ᦅ	ᦆ	ᦇ	ᦈ	ᦉ	ᦊ	ᦋ	ᦌ	ᦍ	ᦎ	ᦏ	ᦐ	ᦑ	ᦒ	ᦓ	ᦔ	ᦕ	ᦖ	ᦗ	ᦘ	ᦙ	ᦚ	ᦛ	ᦜ	ᦝ	ᦞ	ᦟ	ᦠ	ᦡ	ᦢ	ᦣ	ᦤ	ᦥ	ᦦ	ᦧ	ᦨ	ᦩ	ᦪ	ᦫ	᦬	᦭	᦮	᦯	ᦰ	ᦱ	ᦲ	ᦳ	ᦴ	ᦵ	ᦶ	ᦷ	ᦸ	ᦹ	ᦺ	ᦻ	ᦼ	ᦽ	ᦾ	ᦿ	ᧀ	ᧁ	ᧂ	ᧃ	ᧄ	ᧅ	ᧆ	ᧇ	ᧈ	ᧉ	᧊	᧋	᧌	᧍	᧎	᧏	᧐	᧑	᧒	᧓	᧔	᧕	᧖	᧗	᧘	᧙	᧚	᧛	᧜	᧝	᧞	᧟	᧠	᧡	᧢	᧣	᧤	᧥	᧦	᧧	᧨	᧩	᧪	᧫	᧬	᧭	᧮	᧯	᧰	᧱	᧲	᧳	᧴	᧵	᧶	᧷	᧸	᧹	᧺	᧻	᧼	᧽	᧾	᧿	ᨀ	ᨁ	ᨂ	ᨃ	ᨄ	ᨅ	ᨆ	ᨇ	ᨈ	ᨉ	ᨊ	ᨋ	ᨌ	ᨍ	ᨎ	ᨏ	ᨐ	ᨑ	ᨒ	ᨓ	ᨔ	ᨕ	ᨖ	ᨗ	ᨘ	ᨙ	ᨚ	ᨛ	᨜	᨝	᨞	᨟	ᨠ	ᨡ	ᨢ	ᨣ	ᨤ	ᨥ	ᨦ	ᨧ	ᨨ	ᨩ	ᨪ	ᨫ	ᨬ	ᨭ	ᨮ	ᨯ	ᨰ	ᨱ	ᨲ	ᨳ	ᨴ	ᨵ	ᨶ	ᨷ	ᨸ	ᨹ	ᨺ	ᨻ	ᨼ	ᨽ	ᨾ	ᨿ	ᩀ	ᩁ	ᩂ	ᩃ	ᩄ	ᩅ	ᩆ	ᩇ	ᩈ	ᩉ	ᩊ	ᩋ	ᩌ	ᩍ	ᩎ	ᩏ	ᩐ	ᩑ	ᩒ	ᩓ	ᩔ	ᩕ	ᩖ	ᩗ	ᩘ	ᩙ	ᩚ	ᩛ	ᩜ	ᩝ	ᩞ	᩟	᩠	ᩡ	ᩢ	ᩣ	ᩤ	ᩥ	ᩦ	ᩧ	ᩨ	ᩩ	ᩪ	ᩫ	ᩬ	ᩭ	ᩮ	ᩯ	ᩰ	ᩱ	ᩲ	ᩳ	ᩴ	᩵	᩶	᩷	᩸	᩹	᩺	᩻	᩼	᩽	᩾	᩿	᪀	᪁	᪂	᪃	᪄	᪅	᪆	᪇	᪈	᪉	᪊	᪋	᪌	᪍	᪎	᪏	᪐	᪑	᪒	᪓	᪔	᪕	᪖	᪗	᪘	᪙	᪚	᪛	᪜	᪝	᪞	᪟	᪠	᪡	᪢	᪣	᪤	᪥	᪦	ᪧ	᪨	᪩	᪪	᪫	᪬	᪭	᪮	᪯	᪰	᪱	᪲	᪳	᪴	᪵	᪶	᪷	᪸	᪹	᪺	᪻	᪼	᪽	᪾	ᪿ	ᩀ	ᩁ	ᩂ	ᩃ	ᩄ	ᩅ	ᩆ	ᩇ	ᩈ	ᩉ	ᩊ	ᩋ	ᩌ	ᩍ	ᩎ	ᩏ	ᩐ	ᩑ	ᩒ	ᩓ	ᩔ	ᩕ	ᩖ	ᩗ	ᩘ	ᩙ	ᩚ	ᩛ	ᩜ	ᩝ	ᩞ	᩟	᩠	ᩡ	ᩢ	ᩣ	ᩤ	ᩥ	ᩦ	ᩧ	ᩨ	ᩩ	ᩪ	ᩫ	ᩬ	ᩭ	ᩮ	ᩯ	ᩰ	ᩱ	ᩲ	ᩳ	ᩴ	᩵	᩶	᩷	᩸	᩹	᩺	᩻	᩼	᩽	᩾	᩿	ᩀ	ᩁ	ᩂ	ᩃ	ᩄ	ᩅ	ᩆ	ᩇ	ᩈ	ᩉ	ᩊ	ᩋ	ᩌ	ᩍ	ᩎ	ᩏ	ᩐ	ᩑ	ᩒ	ᩓ	ᩔ	ᩕ	ᩖ	ᩗ	ᩘ	ᩙ	ᩚ	ᩛ	ᩜ	ᩝ	ᩞ	᩟	᩠	ᩡ	ᩢ	ᩣ	ᩤ	ᩥ	ᩦ	ᩧ	ᩨ	ᩩ
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

छंदा-सारणी (logarithmic tables)

ᐅ	ᐆ	ᐇ	ᐈ	ᐉ	ᐊ	ᐋ	ᐌ	ᐍ	ᐎ	ᐏ	ᐐ	ᐑ	ᐒ	ᐓ	ᐔ	ᐕ	ᐖ	ᐗ	ᐘ	ᐙ	ᐚ	ᐛ	ᐜ	ᐝ	ᐞ	ᐟ	ᐠ	ᐡ	ᐢ	ᐣ	ᐤ	ᐥ	ᐦ	ᐧ	ᐨ	ᐩ	ᐪ	ᐫ	ᐬ	ᐭ	ᐮ	ᐯ	ᐰ	ᐱ	ᐲ	ᐳ	ᐴ	ᐵ	ᐶ	ᐷ	ᐸ	ᐹ	ᐺ	ᐻ	ᐼ	ᐽ	ᐾ	ᐿ	ᑀ	ᑁ	ᑂ	ᑃ	ᑄ	ᑅ	ᑆ	ᑇ	ᑈ	ᑉ	ᑊ	ᑋ	ᑌ	ᑍ	ᑎ	ᑏ	ᑐ	ᑑ	ᑒ	ᑓ	ᑔ	ᑕ	ᑖ	ᑗ	ᑘ	ᑙ	ᑚ	ᑛ	ᑜ	ᑝ	ᑞ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ	ᑕ	ᑗ	ᑛ	ᑟ	ᑐ	ᑑ	ᑓ
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

प्रति=उदा-सारणी (antilogarithmic table)

	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	१२३	१२४	१२५
००	१०००	१००२	१००४	१००७	१००९	१०१२	१०१४	१०१६	१०१८	१०२१	००१	१११	११२
०१	१०२३	१०२६	१०२८	१०३०	१०३३	१०३५	१०३७	१०३९	१०४१	१०४३	००१	१११	११२
०२	१०४५	१०४७	१०४९	१०५१	१०५३	१०५५	१०५७	१०५९	१०६१	१०६३	००१	१११	११२
०३	१०६५	१०६७	१०६९	१०७१	१०७३	१०७५	१०७७	१०७९	१०८१	१०८३	००१	१११	११२
०४	१०८५	१०८७	१०८९	१०९१	१०९३	१०९५	१०९७	१०९९	११०१	११०३	००१	१११	११२
०५	११०५	११०७	११०९	११११	१११३	१११५	१११७	१११९	११२१	११२३	००१	१११	११२
०६	११२५	११२७	११२९	११३१	११३३	११३५	११३७	११३९	११४१	११४३	००१	१११	११२
०७	११४५	११४७	११४९	११५१	११५३	११५५	११५७	११५९	११६१	११६३	००१	१११	११२
०८	११६५	११६७	११६९	११७१	११७३	११७५	११७७	११७९	११८१	११८३	००१	१११	११२
०९	११८५	११८७	११८९	११९१	११९३	११९५	११९७	११९९	१२०१	१२०३	००१	१११	११२
१०	१२०५	१२०७	१२०९	१२११	१२१३	१२१५	१२१७	१२१९	१२२१	१२२३	००१	१११	११२
११	१२२५	१२२७	१२२९	१२३१	१२३३	१२३५	१२३७	१२३९	१२४१	१२४३	००१	१११	११२
१२	१२४५	१२४७	१२४९	१२५१	१२५३	१२५५	१२५७	१२५९	१२६१	१२६३	००१	१११	११२
१३	१२६५	१२६७	१२६९	१२७१	१२७३	१२७५	१२७७	१२७९	१२८१	१२८३	००१	१११	११२
१४	१२८५	१२८७	१२८९	१२९१	१२९३	१२९५	१२९७	१२९९	१३०१	१३०३	००१	१११	११२
१५	१३०५	१३०७	१३०९	१३११	१३१३	१३१५	१३१७	१३१९	१३२१	१३२३	००१	१११	११२
१६	१३२५	१३२७	१३२९	१३३१	१३३३	१३३५	१३३७	१३३९	१३४१	१३४३	००१	१११	११२
१७	१३४५	१३४७	१३४९	१३५१	१३५३	१३५५	१३५७	१३५९	१३६१	१३६३	००१	१११	११२
१८	१३६५	१३६७	१३६९	१३७१	१३७३	१३७५	१३७७	१३७९	१३८१	१३८३	००१	१११	११२
१९	१३८५	१३८७	१३८९	१३९१	१३९३	१३९५	१३९७	१३९९	१४०१	१४०३	००१	१११	११२
२०	१४०५	१४०७	१४०९	१४११	१४१३	१४१५	१४१७	१४१९	१४२१	१४२३	००१	१११	११२
२१	१४२५	१४२७	१४२९	१४३१	१४३३	१४३५	१४३७	१४३९	१४४१	१४४३	००१	१११	११२
२२	१४४५	१४४७	१४४९	१४५१	१४५३	१४५५	१४५७	१४५९	१४६१	१४६३	००१	१११	११२
२३	१४६५	१४६७	१४६९	१४७१	१४७३	१४७५	१४७७	१४७९	१४८१	१४८३	००१	१११	११२
२४	१४८५	१४८७	१४८९	१४९१	१४९३	१४९५	१४९७	१४९९	१५०१	१५०३	००१	१११	११२

[illegible]

मुद्रक
शिवकुमार वर्मा, एम. ए.
प्रबन्धक, आर्यभारती मुद्रणालय
नागपुर.

शुद्धिपत्र

पृष्ठ पंक्ति

अशुद्ध

शुद्ध

$$५ \quad २ \quad \text{स्प } ३६^{\circ} = \frac{\sqrt{५}-१}{\sqrt{५}+१} \quad \text{स्प } ३६^{\circ} = \frac{\sqrt{१०}-२}{\sqrt{५}+१}$$

$$५ \quad ४ \quad \text{ज्या } (-अ) = \text{ज्या अ} \quad \text{ज्या } (-अ) = -\text{ज्या अ}$$

$$९ \quad ९ \quad [\text{अशुद्ध}] = \text{सा स्प } \frac{क}{२} \quad \text{धत्रा ज्या } \frac{क}{२} \quad \text{को ज्या } \frac{ख}{२} \quad \text{को ज्या } \frac{ग}{२}$$

$$[\text{शुद्ध}] = \text{सा स्प } \frac{क}{२} = \text{धत्रा ज्या } \frac{क}{२} \quad \text{को ज्या } \frac{ख}{२} \quad \text{को ज्या } \frac{ग}{२}$$

१४ १९

१ अ

१ आ

२६ १५

$$\text{स्प अ} = \frac{\text{मव}}{\text{मम}}$$

$$\text{स्प अ} = \frac{\text{भव}}{\text{मम}}$$

२७ ६

$$\frac{\text{मभ}}{\text{मव}}$$

$$\frac{\text{मभ}}{\text{भव}}$$

३० १९

$$\frac{\text{भव' मव}}{\text{मभ' मव}}$$

$$\frac{\text{भव/मव}}{\text{मभ/मव}}$$

६७ ५

और व कोस्प अ

और कोस्प अ

११० दसवीं पंक्ति के पश्चात् यह वाक्य पढ़िए— इसलिये सामान्य पदसंहति २ सप्त्या $\pm \frac{५ \text{ ज्या } ३६^{\circ}}{६}$ है ।

पृष्ठ पङ्क्ति	अशुद्ध	शुद्ध
११३ १२	± ३	± ३
११३ १०	सिद्ध करो	साधन करो
११५ ३	सिद्ध करो	साधन करो
१५१ ५	= कोज्या ^२ २ क	= कोज्या ^३ २ क
१५२ ११	१	१
	<hr/>	
	व्युत्कोज्या, $\frac{क}{२}$	व्युत्कोज्या ^१ , $\frac{क}{२}$
१८७ १३	- का. खा कोज्या ग	- ५ का खा. कोज्या ग
२३५ १२	+ कोज्या (ग-ख) }]	+ कोज्या (ग-ख) }]
२५६ १९	(कय) ^२ = कय-२	(कय) ^२ = कय
२६२ २०	१ होता है	१ होता है
२६८ १७	अर्धा स्थूल से	अर्धा स्थूल रूप से